→ Aperçu



LES MATHÉMATIQUES EN IMAGES

ZIAUDDIN SARDAR, JERRY RAVETZ & BORIN VAN LOON

→ Aperçu

LES MATHÉMATIQUES

ZIAUDDIN SARDAR, JERRY RAVETZ & BORIN VAN LOON



Dans la même collection :

La génétique, 2015, ISBN : 978-2-7598-1767-2

La logique, 2015, ISBN : 978-2-7598-1748-1

La relativité en images, 2015, ISBN : 978-2-7598-1728-3

Le temps en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1228-8

La théorie quantique en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1229-5

La physique des particules en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1230-1

La psychologie en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1231-8

Édition originale : Mathematics, © Icon Books Lts, London, 2011.
Traduction : Alan Rodney

Imprimé en France par Présence Graphique, 37260 Monts
Mise en page de l'édition française : studiowakeup.com

ISBN : 978-2-7598-1737-5

Pourquoi s'intéresser aux mathématiques ?

Rien qu'en entendant le mot « maths », tout le monde gémit. Les gens pensent que le monde est peuplé de deux sortes de personnes. Les « fûtés », qui comprennent les mathématiques mais ne sont pas exactement ceux dont on aimerait faire la connaissance à une fête…



Mais nous tous avons besoin de comprendre un peu les mathématiques. Sans elles, la vie ne serait pas concevable.





Ce qui est sûr, c'est que les mathématiques nous guident dans le monde où nous vivons, celui que nous « formons » et modifions et dont nous faisons partie. Et puisque ce monde devient de plus en plus complexe, que les incertitudes de l'environnement deviennent de plus en plus urgentes et menaçantes, nous avons besoin des mathématiques pour mieux appréhender ces risques et pour mettre en place des solutions.

La capacité d'aborder les mathématiques ne requiert pas de talents spéciaux ou des compétences particulières – c'est exactement comme pour tout autre champ d'activités humaines, telle la danse. Un peu comme une performance de ballet, complexe et exquise à la fois, une démonstration de mathématiques peut être sophistiquée et belle à la fois.

Mais même si la plupart d'entre nous ne deviendrons jamais des artistes chevronnés du ballet, nous savons tous ce qu'est la danse, et d'ailleurs pratiquement tout le monde sait danser, du moins un peu.

De même, nous devrions tous savoir un peu à quoi ressemblent les mathématiques et être capables d'aborder et d'exécuter certaines opérations de base.



Compter



À l'école, nos enfants apprennent à compter, à calculer et à mesurer. Et, une fois apprises, ces techniques leur semblent «élémentaires». Mais pour des novices, elles sont pleines de mystères.

Réciter des nombres devient une incantation, surtout quand on s'approche des grands nombres. Compter jusqu'à cent est fatigant, mais jusqu'à mille, c'est une montagne entière qu'il faut escalader! Alors, quel est le dernier nombre, le plus grand d'entre tous?

Comment est-ce que nous nommons les nombres, c'est-à-dire quelle est notre façon de les énoncer l'un après l'autre ? Peut-être que seulement quelques nombres suffisent. Il y a des animaux qui parviennent à reconnaître des groupes de nombres, jusqu'à cinq ou sept – et au-delà, ils les considèrent comme « beaucoup ». Mais si nous savons que les nombres s'enchaînent sans fin, nous ne pouvons pas inventer de nouveaux noms indéfiniment.

Le langage des Indiens Dakota n'était pas écrit.



Leur langage était sous forme de toile tissée avec des pictogrammes en encre noire. Chaque année, un nouveau pictogramme était ajouté pour consigner le principal événement de l'année écoulée.

La meilleure façon de nommer systématiquement les choses et les nombres, c'est d'avoir une **base**, c'est-à-dire un nombre qui sert à fixer le début d'un comptage. La base la plus simple est la base 2. Par exemple, les Gumulgals, peuplade indigène qui vivait en Australie, comptaient ainsi :

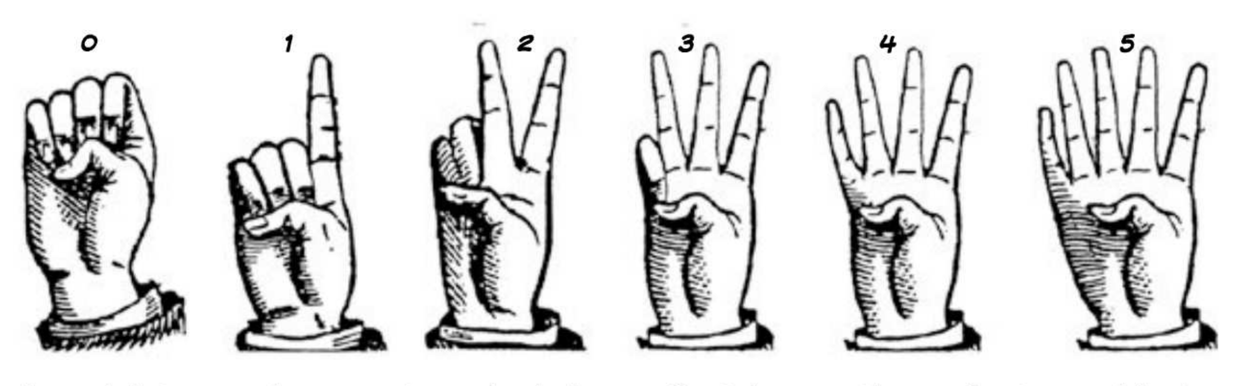
1 = *urapon*
2 = *ukasar*
3 = *urapon-ukasar*
4 = *ukasar-ukaser*

CELA PEUT PARAÎTRE PRIMITIF ET FATIGANT.

MAIS LA BASE 2, AVEC SES SÉQUENCES DE 0 ET DE 1...

... EST CELLE-LÀ MÊME UTILISÉE DANS NOS ORDINATEURS ET CONSTITUE LE FONDEMENT DE TOUS LEURS CALCULS.





Les doigts aussi peuvent servir de base. Certains systèmes font appel à cinq doigts mais, plus couramment, on compte avec les dix doigts. Cependant, il existe bien d'autres bases, tel l'ancien système monétaire britannique où douze pennies valaient un shilling, puis vingt shillings une livre sterling, voire vingt-et-un shillings une guinée ! Les caissières dans les magasins devaient avoir un livre de calculs et d'équivalence sous la main pour donner les prix. Et quand, par exemple, les gens achetaient à crédit, ils pouvaient s'entendre dire que leur nouveau canapé au prix de 155 guinées pouvait être réglé en 104 échéances, chacune de une livre, quinze shillings et sept pennies et demi !

La base 20 (les doigts des mains et des pieds ?) est également assez courante. Les Yorubas d'Afrique l'utilisaient et passaient par la soustraction pour des nombres plus grands, mais toujours avec la même base. Ils avaient des noms différents pour les nombres de un (okan) à dix (eewa). À partir de onze et jusqu'à quatorze, ils additionnaient. Ainsi onze correspondait à « un de plus que dix » et quatorze à « quatre de plus que dix ». À partir de quinze, ils passaient à la soustraction. Ainsi, quinze était « vingt moins cinq » et dix-neuf était « vingt moins un », et jusque quatre-vingt-dix-neuf qui était « quatre-vingts plus vingt moins un ».



Il n’existe pas de « meilleure base ». Nous pouvons juste penser à un système de numérotation ayant certains attributs : facile à mémoriser, simple pour nommer les éléments, utile pour faire des calculs, etc.







Il était possible, bien sûr, de calculer au sein d'une culture sans écriture. Mais de tels calculs demandaient une grande mémoire et des talents particuliers. Au fur et à mesure que l'art de l'écriture s'est répandu, différents systèmes, parfois assez complexes, ont fait leur apparition.



Les Aztèques du Mexique possédaient un système de numérotage utilisant la base 20 comprenant quatre symboles.

Le 1 était un gros point, représentant un grain de maïs.

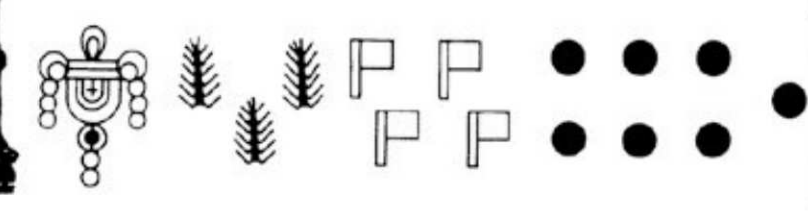
Le 20 était représenté par un drapeau. 

Le 400 était représenté par un plant de maïs.

Le 8 000 était symbolisé par une poupée de maïs.

Avec ces quatre symboles, les Aztèques parvenaient à représenter toutes sortes de nombres. Par exemple, le nombre 9 287 était représenté par :

8 000 + (3 × 400) + (4 × 20) + 7





0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Les Mayas, civilisation précolombienne d'Amérique centrale, n'utilisaient que trois symboles pour leur système de numérotation :

... LE 1 ÉTAIT UN POINT ●.

... LE 5 UNE LIGNE HORIZONTALE ——.

... ET LE 0 ÉTAIT UNE COQUILLE D'ESCARGOT.

Ainsi :

●●● représente 3

représente 13

et vingt devenait



Les Égyptiens de l'Antiquité (c. 4000–3000 avant J.-C.) utilisaient un sous-ensemble de leurs hiéroglyphes pour écrire leurs nombres.



Les Babyloniens (c. 2000 avant J.-C.) se servaient d'un système en base 60 et de multiples de 60, avec les symboles suivants :

1 10 60 600 3600

Plus tard, ils ont fait évoluer le système précédent, ne conservant que deux valeurs :

pour le 1 (ou le 60 selon la position sur la ligne) et pour le 10.

Ainsi, pour représenter 95, le scribe écrivait :

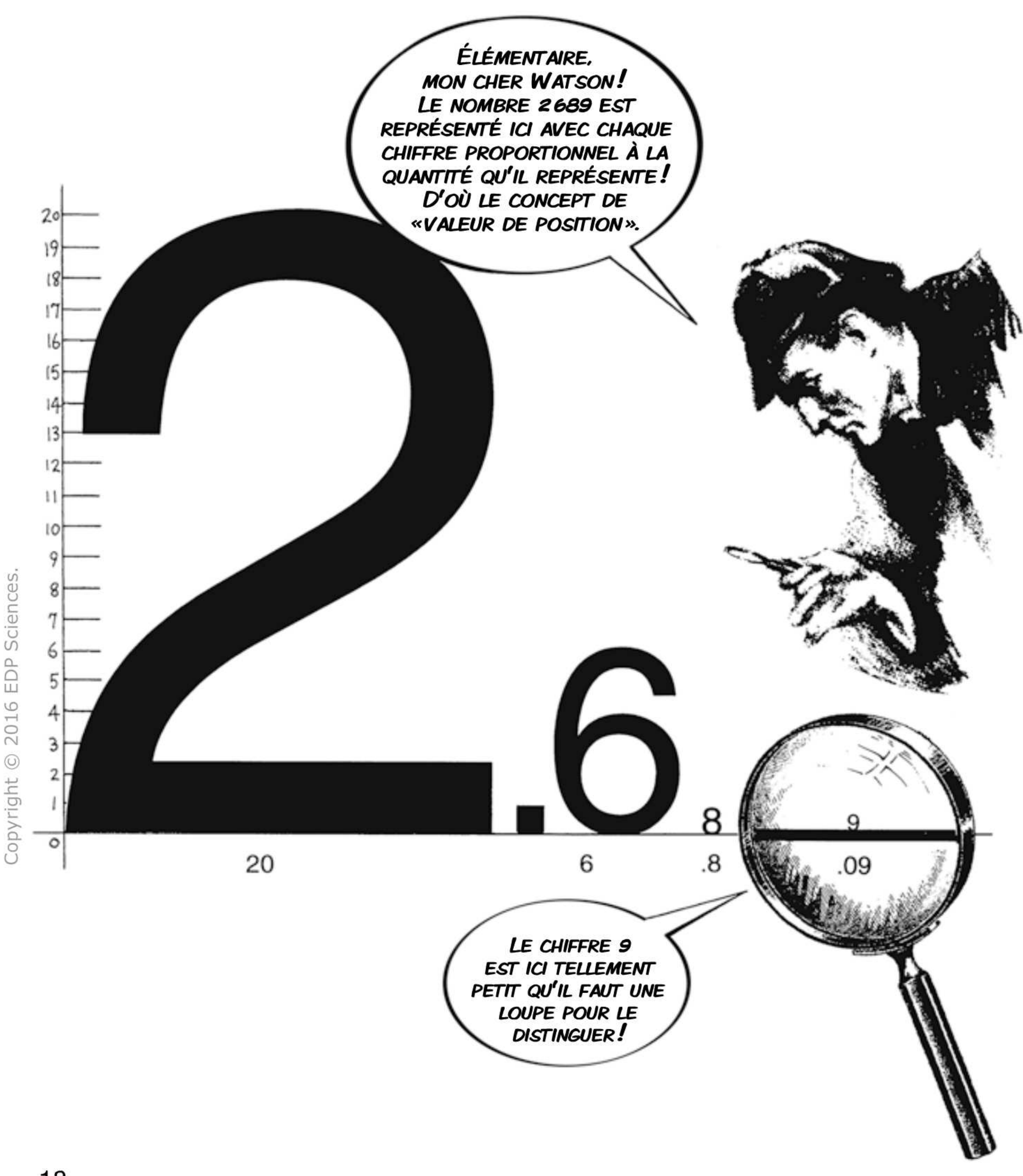
95 = 60 (1) + 35 :

Le système babylonien en base 60 (sexagésimal) est resté. Nos cercles ont 360°. Les heures ont 60 minutes et les minutes 60 secondes.

L’ancienne Chine (c. 1400–1100 avant J.-C.) utilisait une base 10 au début et des symboles de 1 à 10, pour 100, 1 000 et 10 000. Plus tard, vers



Les Chinois avaient réalisé, il est vrai, cette très belle invention qui place les symboles écrits dans un monde différent des noms des nombres. Il s'agissait d'un système de « valeur de position ». Le sens d'un nombre, en tant qu'expression de la quantité, dépendait de sa position dans un chapelet de nombres. Pour illustrer, un 2 pouvait prendre la valeur deux, vingt ou deux cents suivant sa place dans la séquence. Cela rendait inutile de nommer les bases plus élevées – nous savons bien que dans 234 le 2 correspond à 200.





Les Indiens (d’Inde) ont développé trois systèmes distincts de numérotation.

D’abord, les Kharosthi (c. 400–200 avant J.-C.) se servaient de symboles pour dix et vingt, les autres nombres jusqu’à cent se construisant par addition.

Puis, les Brahmi (c. 300 avant J.-C.) se sont servis de symboles distincts pour les chiffres un, quatre, neuf et dix, cent, mille et ainsi de suite.

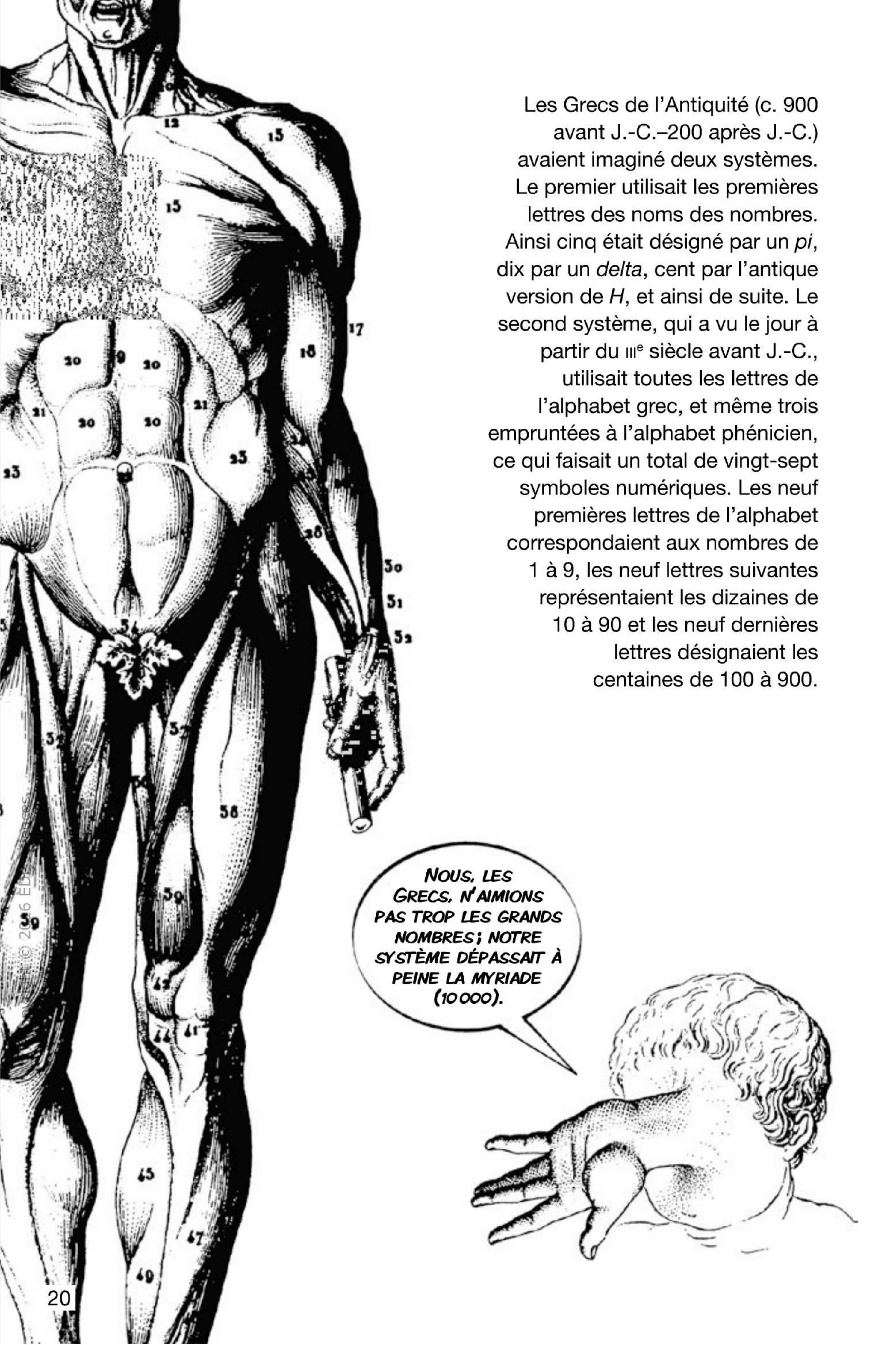
Enfin, les Gwalior (c. 850) avaient adopté des symboles pour les nombres de un à neuf, mais aussi un symbole pour le zéro.



Les Indiens étaient très à l’aise avec les grands nombres. Les textes hindous fournissent des noms, tel parardha pour 1 000 000 000 000 (en sanskrit-hindi नमो वद्विद्भ्यः. परार्धम्, le plus grand nombre mentionné dans le Narada Purana).



Les Grecs de l'Antiquité (c. 900 avant J.-C.–200 après J.-C.) avaient imaginé deux systèmes. Le premier utilisait les premières lettres des noms des nombres. Ainsi cinq était désigné par un *pi*, dix par un *delta*, cent par l'antique version de *H*, et ainsi de suite. Le second système, qui a vu le jour à partir du IIIe siècle avant J.-C., utilisait toutes les lettres de l'alphabet grec, et même trois empruntées à l'alphabet phénicien, ce qui faisait un total de vingt-sept symboles numériques. Les neuf premières lettres de l'alphabet correspondaient aux nombres de 1 à 9, les neuf lettres suivantes représentaient les dizaines de 10 à 90 et les neuf dernières lettres désignaient les centaines de 100 à 900.

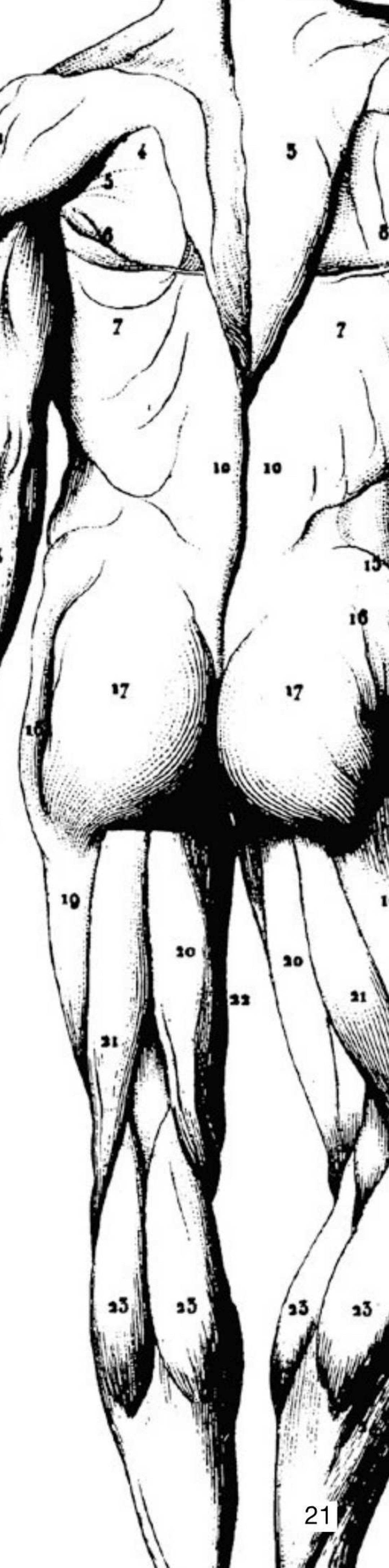


Le système de notation utilisé chez les Romains (400 avant J.-C.– 600 après J.-C.) comprenait sept symboles : I pour 1, V pour 5, X pour 10, L pour 50, C pour 100, D pour 500 et M pour 1 000.

Les nombres s'inscrivaient de gauche à droite, en commençant en principe par les symboles les plus grands, et c'est par l'addition des valeurs que l'on atteignait le nombre voulu.

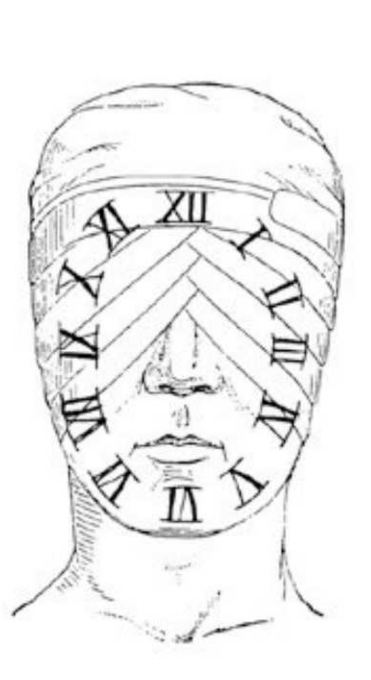
Ainsi LX correspond à 60.

Dans la pratique et pour plus de facilité, un symbole de plus petite valeur pouvait être inséré à gauche d'un symbole plus grand. Ainsi MCM représente l'année 1900.



Ce système de numérotation, encore utilisé de nos jours pour les horloges ou les ornements, n'était pas des plus commodes pour effectuer des calculs.





Le fait d'affecter un nombre à chaque lettre de l'alphabet a permis l'essor d'un d'art divinatoire très sophistiqué, la gématrie (partie de la Kabbale juive fondée sur l'interprétation arithmétique des mots de la Bible) ou, plus couramment, la numérologie. À partir d'un mot, surtout d'un nom propre, on pouvait redisposer les lettres pour former un nombre puis les analyser en termes de qualité et de sens caché. Quiconque dont le nom donnait 666 (le nombre biblique pour la Bête) était évidemment maudit !



La civilisation musulmane (650 avant J.-C. à nos jours) a développé deux ensembles de nombres, assez semblables en définitive, mais l'un était utilisé dans la partie orientale du monde musulman (Arabie et Perse), tandis que l'autre est devenu courant dans la partie occidentale (Maghreb et Espagne musulmane). Les deux systèmes contiennent dix symboles allant de zéro à neuf.

Ensemble oriental : ٠ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

Ensemble occidental : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

L'ensemble oriental est encore utilisé dans tout le monde arabophone. L'ensemble occidental est devenu ce que nous, Occidentaux, appelons « les chiffres arabes », c'est-à-dire notre système actuel de numérotation.

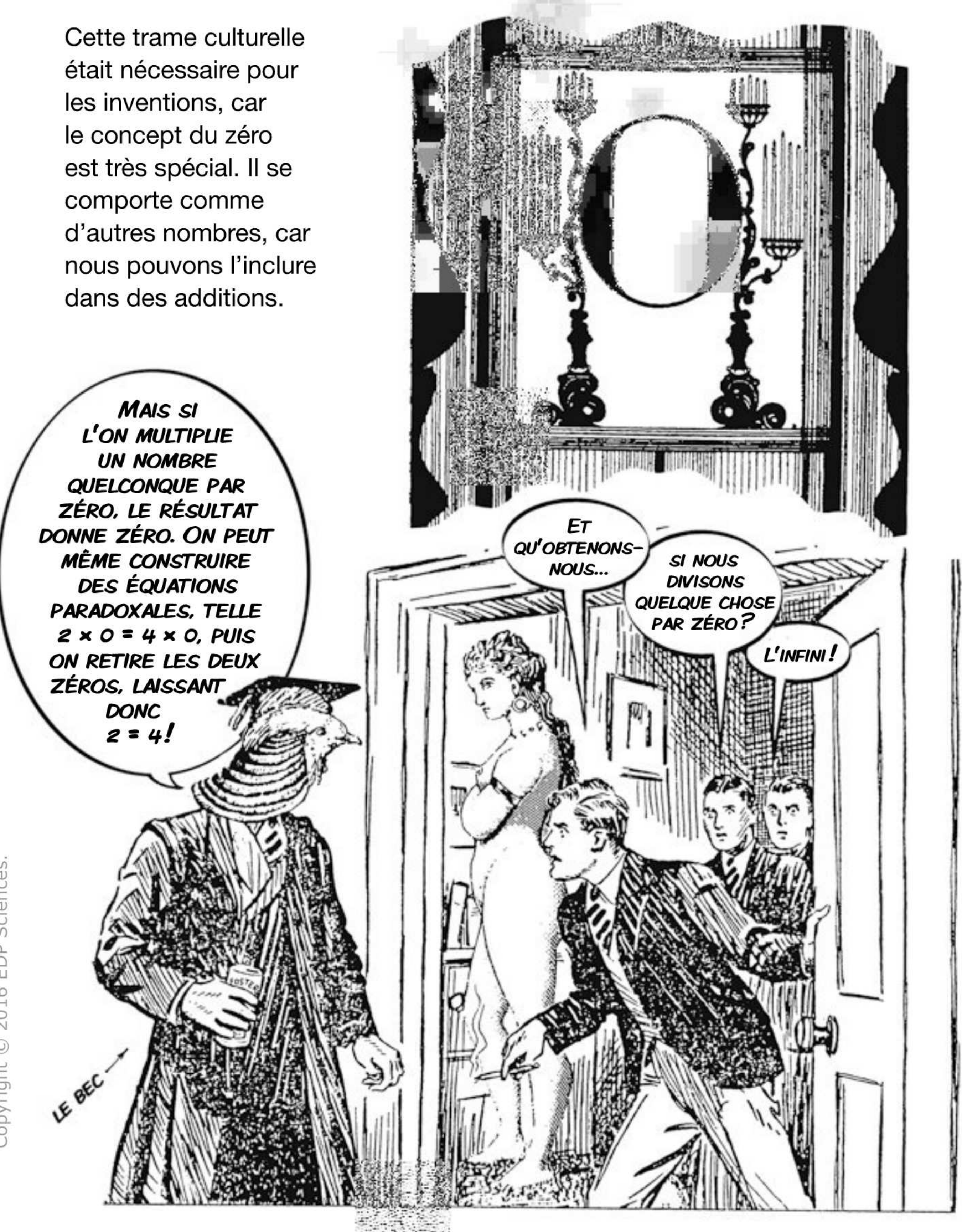


Le Zéro

Le zéro est en réalité une invention relativement récente (vers le VIe siècle de notre ère) et semble être le fruit des civilisations chinoise et hindoue. Les Chinois en avaient besoin pour compléter leur système, qui associait la place du symbole et sa valeur. Comment pouvaient-ils représenter « deux cent cinq » ? Comme 25 serait manifestement faux, il fallait un symbole pour combler le « vide », par exemple avec un tiret, comme 2-5. Mais le sens véritable du zéro a été développé dans la civilisation indienne, avec ses spéculations sur le vide très poussées.



Cette trame culturelle était nécessaire pour les inventions, car le concept du zéro est très spécial. Il se comporte comme d'autres nombres, car nous pouvons l'inclure dans des additions.



Le zéro est nécessaire pour certains calculs, mais il est « exclu » dès lors qu'il s'agit de compter. Le premier objet dans une rangée n'est pas le « zéro-ième ». Nous retrouvons ce paradoxe dans le calendrier : les années 1900 font partie du XXe siècle car il n'existait pas de « zéro-ième » siècle au début du calendrier occidental, dit de « notre ère ».

Le zéro peut revêtir deux sens, comme on voit dans cette « blagounette ». Le guide d'un musée s'adresse aux visiteurs scolaires :



Tout le monde a compris que l'affirmation était ridicule, mais il n'empêche que l'un des enfants a fait l'addition…

comme il avait appris à la faire à l'école. Personne ne lui avait dit que les six zéros venant après le 65 étaient des chiffres de remplissage et non de comptage. Après tout, $0 \times 4 = 0$ mais $0 + 4 = 4$. C'était peut-être de tels paradoxes (mais les enfants aujourd'hui en sont soigneusement protégés) qui ont rendu les premiers mathématiciens soupçonneux face à d'étranges nombres comme le zéro.

Quelques nombres spéciaux

En dehors du zéro, il existe d'autres catégories de nombres spéciaux avec lesquels nous devons nous familiariser.

Certains sont des « nombres avec de la personnalité », pouvant de ce fait être considérés comme possédant des propriétés magiques. Les nombres 2, 3, 5, 7 et 13 sont chacun, à leur manière, « spéciaux ». Il y a aussi les nombres définis par des propriétés arithmétiques qui ont attiré l'attention.

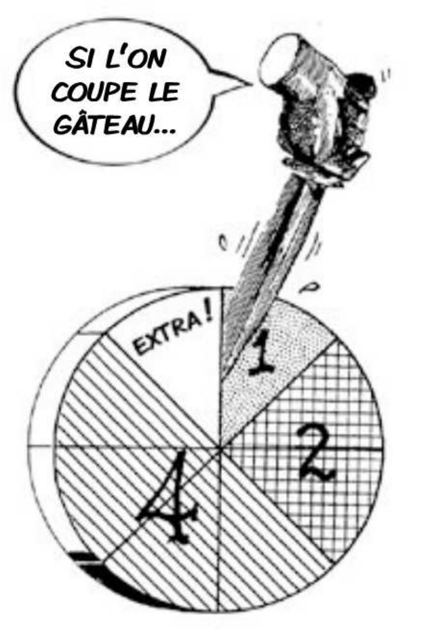
Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet seulement deux diviseurs entiers et positifs (qui sont le 1 et lui-même).

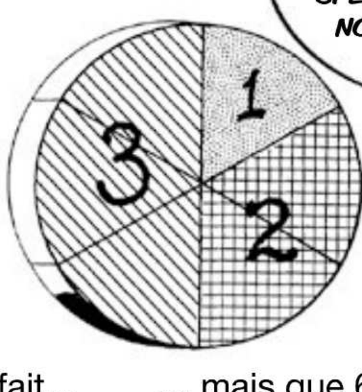
Des exemples de nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

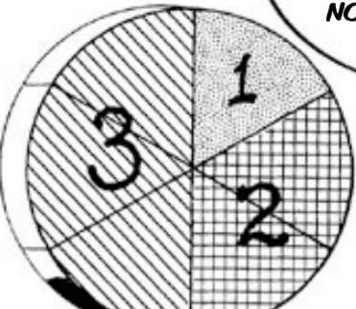
Les **nombres « parfaits »** sont égaux à la somme de leurs diviseurs, appelés les parties aliquotes (à noter qu'il n'en existe que 3 jusque 1 000 – le 6, le 28 et le 496. Ensuite vient 8128, puis 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691…). Le 6 est parfait parce que ses diviseurs – 1, 2 et 3 – s'additionnent pour donner 6.

Un autre nombre parfait est 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 ; le suivant est 496 mais vous pouvez trouver les parties aliquotes vous-même.











On voit que 8 n'est pas parfait… … mais que 6 l'est !





Les **nombres négatifs,** de valeur inférieure à zéro (comme la température le jour où il fait très froid), portent le symbole « moins » : –. Ils sont aussi indispensables mais présentent, tout de même, des paradoxes, tels que dans (–1) × (–1) = +1.

Les «**fractions**» ou «**nombres rationnels**» sont des quantités que l'on peut exprimer comme le rapport entre deux entiers, par exemple 2/3. Ils sont nécessaires pour faire des calculs, mais pas pour compter, dans la mesure où il n'y a pas d'unités fractionnaires, ni « suivants », comme quand on dit que 5 suit 4… Pour ces raisons, ils ont mis longtemps à être acceptés comme des « nombres ». De plus, ils ont un système d'arithmétique à part, lequel n'est pas facile à comprendre.

*biscuit britannique très dur, « incassable »



Toutes ces familles de nombres étaient connues dans d'autres grandes civilisations, telles que la civilisation chinoise ou indienne. Avec le développement des mathématiques théoriques, d'abord chez les Grecs, de nouvelles propriétés sont apparues, menant à l'invention de nouvelles sortes de nombres.

Les **nombres irrationnels** ne peuvent être exprimés comme des rapports entre deux entiers. Un exemple important est la racine carrée de 2 (symbole √2) révélée par des opérations géométriques. Elle représente la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des côtés de même longueur, un.

On appelle ces nombres des « irrationnels ».



Réduire ce rapport à des irrationnels avait pour nom « la quadrature du cercle ». Des mathématiciens avaient essayé de résoudre cette quadrature pendant des siècles, jusqu'à ce qu'il fut démontré que c'était rigoureusement impossible. De tels nombres prenaient alors le nom de…

Les **nombres imaginaires** sont le résultat d'une multiplication d'un nombre réel par une quantité « imaginaire », c'est-à-dire par la racine carrée de moins 1 ($\sqrt{-1}$).

Dès que l'on additionne des nombres imaginaires à des nombres réels, la somme devient « **complexe** ».

DE TELS NOMBRES COMPLEXES PEUVENT FACILEMENT ÊTRE REPRÉSENTÉS SUR UN PLAN ET POSSÈDENT UNE ARITHMÉTIQUE SPÉCIALE.

LE PLAN COMPLEXE

$4\sqrt{-1}$

$3\sqrt{-1}$

$2\sqrt{-1}$

$3{,}2\sqrt{-1}$

$\sqrt{-1}$

AGINAIRE

0 1 2 3 4 5

RÉEL

LES NOMBRES COMPLEXES SERVENT À REPRÉSENTER DES QUANTITÉS QUI VARIENT PÉRIODIQUEMENT, COMME LE COURANT ALTERNATIF.

Les grands nombres

La plupart d'entre nous sommes impressionnés par les grands nombres et nous trouvons difficile d'en apprécier leur ordre de grandeur réel.

Un milliard, c'est grand comment ?

Ça fait mille millions.

Il y a un milliard d'années, l'Homme était sur le point d'arriver sur Terre.

En 1903, il s'était écoulé un milliard de minutes depuis la naissance du Christ. Il y a un milliard de secondes, ceux qui ont 31 ans aujourd'hui n'étaient pas encore nés.

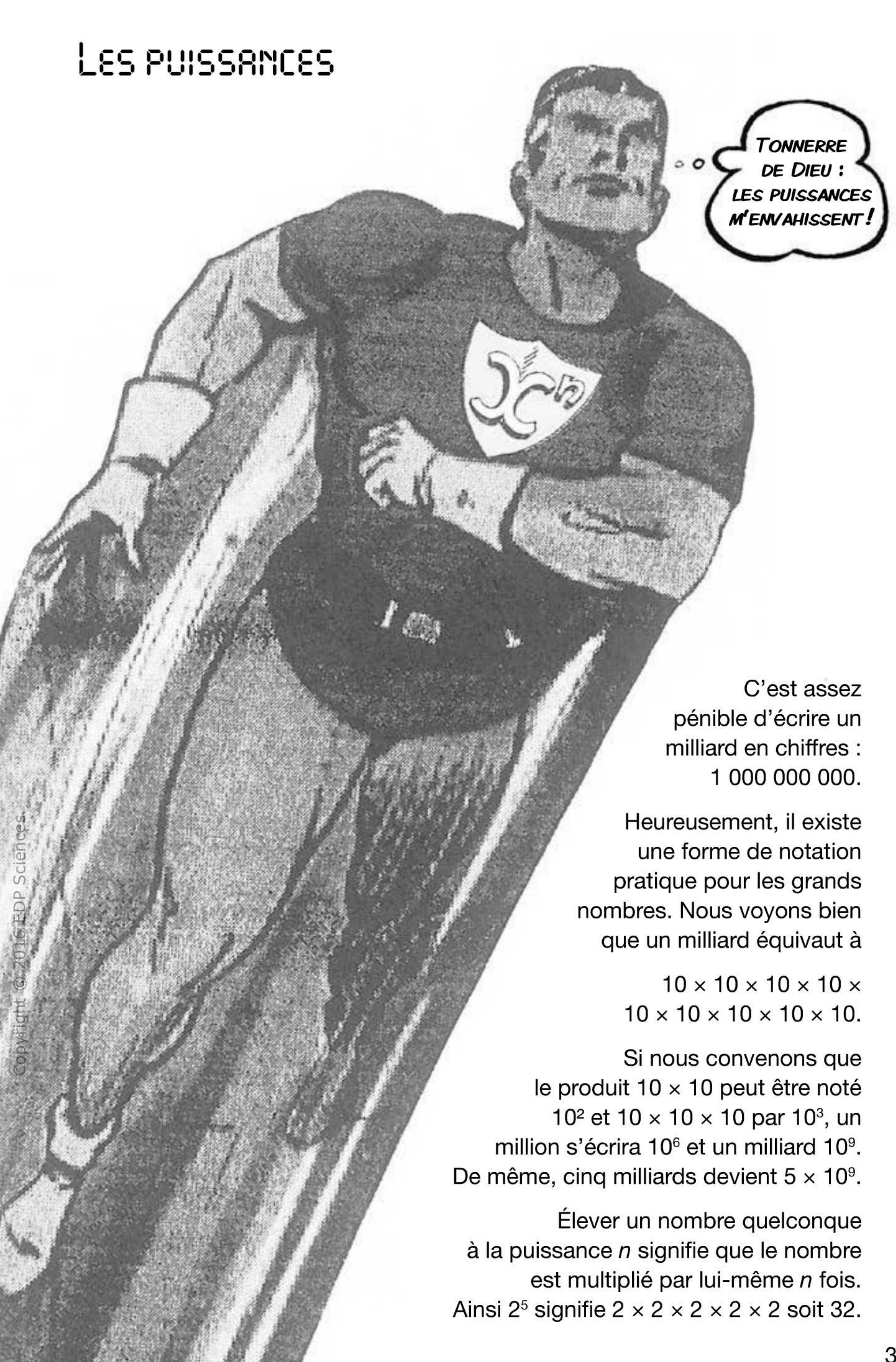
Cent milliards paraît être un nombre encore plus ardu. Mais de nos jours, il n'est pas inhabituel qu'un pays – notamment parmi ceux en voie de développement – ait accumulé une dette nationale de cet ordre. Si un pays endetté devait rembourser un dollar par seconde, 24 heures sur 24, 7 jours sur 7 et 52 semaines par an, il mettrait 3 180 ans à régler le tout…



On peut voir aisément comment on arrive à des nombres aussi grands par le biais d'un vieux démon, la « lettre en chaîne ». Une personne envoie une lettre à deux amis, leur demandant de la recopier et de la faire suivre à deux amis, et ainsi de suite. La première personne envoie donc 2 lettres ; à l'étape suivante 2 × 2 soit 4 lettres sont envoyées ; à la troisième étape 2 × 2 × 2 soit 8 lettres sont envoyées. La question est : en combien d'étapes parvient-on à un milliard de lettres envoyées ?



Les puissances



C'est assez pénible d'écrire un milliard en chiffres : 1 000 000 000.

Heureusement, il existe une forme de notation pratique pour les grands nombres. Nous voyons bien que un milliard équivaut à

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$.

Si nous convenons que le produit 10×10 peut être noté 10^2 et $10 \times 10 \times 10$ par 10^3, un million s'écrira 10^6 et un milliard 10^9. De même, cinq milliards devient 5×10^9.

Élever un nombre quelconque à la puissance *n* signifie que le nombre est multiplié par lui-même *n* fois. Ainsi 2^5 signifie $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ soit 32.

Nous pouvons nous familiariser plus avec cette forme de notation en examinant la question suivante.



Le plus petit résultat est $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Le suivant est 222, puis $2^{22} = 484$ et enfin le plus grand sera 2^{22}, soit 4 194 304.

Cette notation des puissances marche aussi pour les fractions. Pour transformer une puissance en fraction, nous posons simplement un signe négatif devant la puissance. Ainsi, 10^{-1} signifie 1/10 ; 10^{-2} est 1/100 ; 10^{-3} est 1/1 000 et ainsi de suite.





De même, si nous agrandissions une photo ou une carte x fois, il faudra du papier ayant une surface x^2 fois plus grande.

On appelle x, x^2, x^3, x^4 et x^5, respectivement, les puissances un, deux, trois, quatre et cinq. Les premiers nommés pouvaient également être désignées par puissance au carré, ou au cube, en raison de leurs implications géométriques. Il va de soi que n'importe quel nombre peut remplacer les 2, 3, 4 ou 5, de sorte que si nous posons *n* pour « n'importe quel nombre », nous dirons que x^n représente x élevé à la puissance *n*.



Dans son livre *The Dazzling* (*al-Bahir fi'l-jabre* ou *Le brillant en algèbre*), **Ibn Yahya al-Maghribi al-Samawal** (c. 1130–1180), mathématicien né juif à Bagdad et converti par la suite à l'islam, a été le premier à proposer une définition de…

La puissance zéro



Les logarithmes

On appelle logarithme la puissance à laquelle doit être élevé un nombre donné pour obtenir un autre nombre. On appelle « base » le premier nombre. Puisque $10^2 = 100$, $\log_{10} 100 = 2$. On énonce alors « le logarithme de 100 base 10 est 2 ».

Les bases les plus utilisées sont la base 10 et la base exponentielle e (voir p. 99).

Comme nous venons de voir que $x^0 = 1$ quel que soit x, alors $\log 1 = 0$ quelle que soit la base.

Pour pouvoir multiplier ou diviser deux expressions logarithmiques, nous profitons du fait que la multiplication et la division d'un nombre correspondent respectivement à l'addition et à la soustraction de leurs puissances.

Ainsi $\log (X \times Y) = \log X + \log Y$.



Les logarithmes ont été (jusque l'invention des calculettes) très utiles pour simplifier de longs calculs complexes. Pour multiplier (ou diviser) deux nombres, il suffit de trouver leur valeur logarithmique dans une table, les additionner (ou les soustraire), puis retrouver la valeur de cette somme (ou la soustraction) dans la même table pour trouver la valeur du produit (ou le quotient).

Les premières tables, base e, ont été construites par un mathématicien écossais **John Napier** (1550–1617) et on les appelait logarithmes « naturels » ou népériens.

Le calcul

Calculer signifie utiliser une série d'opérations permettant de trouver la réponse à un problème de « calcul ». Toutes les opérations mathématiques impliquent des calculs.

Dans les temps reculés, on utilisait des pierres pour compter. Les anciens Grecs se servaient de cailloux pour compter et pour faire des calculs élémentaires. Le mot moderne « calcul » vient de sa racine latine calculus, le caillou.



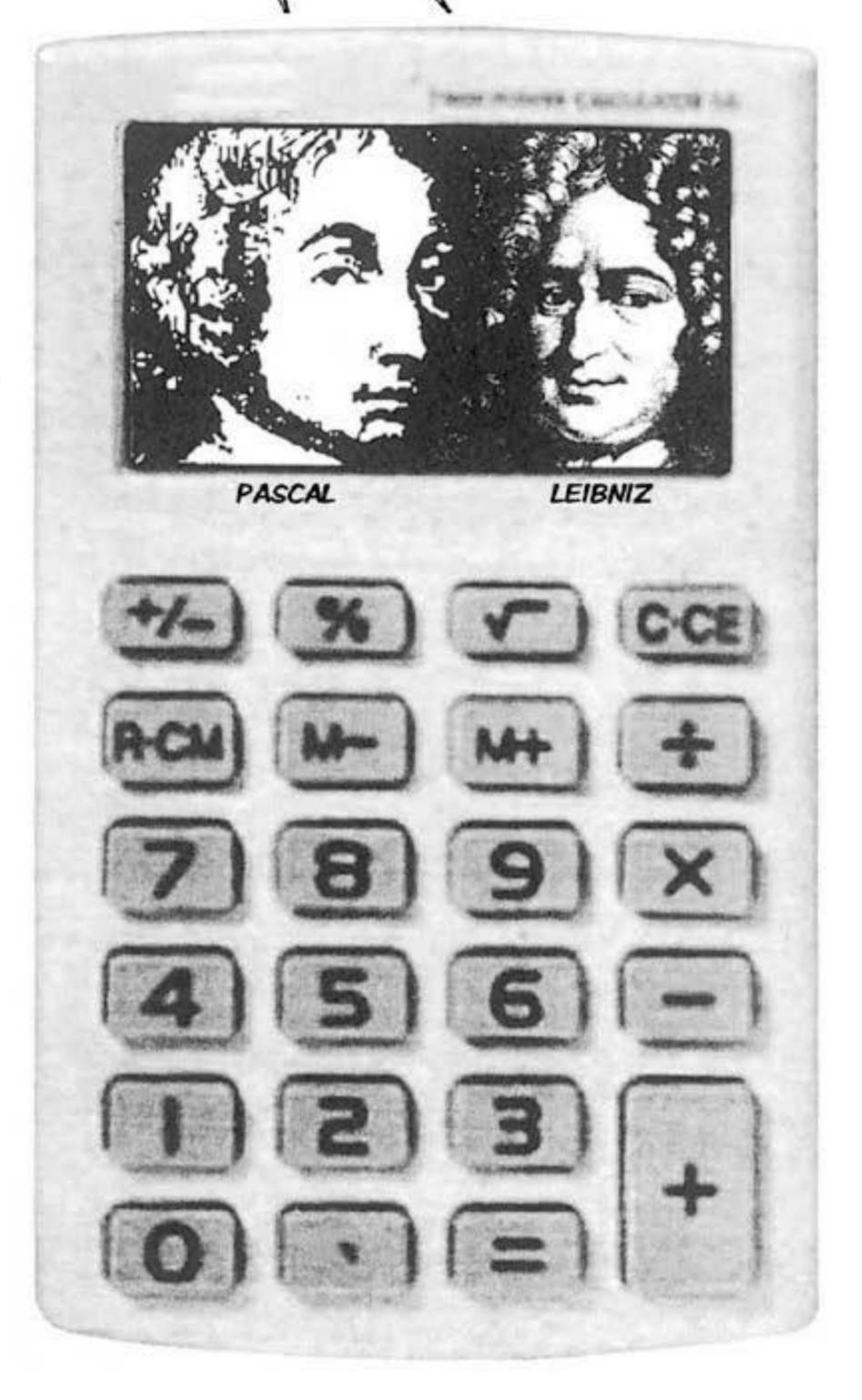
IL A SON COMPTE !

Jusque récemment, l'abaque, constitué de perles que l'on glisse de gauche à droite sur des fils ou des barres, était l'instrument de calcul le plus répandu dans le monde. Même aujourd'hui, un adepte de l'abaque peut manipuler les perles plus rapidement que l'opérateur les touches de son clavier (d'ordinateur) !

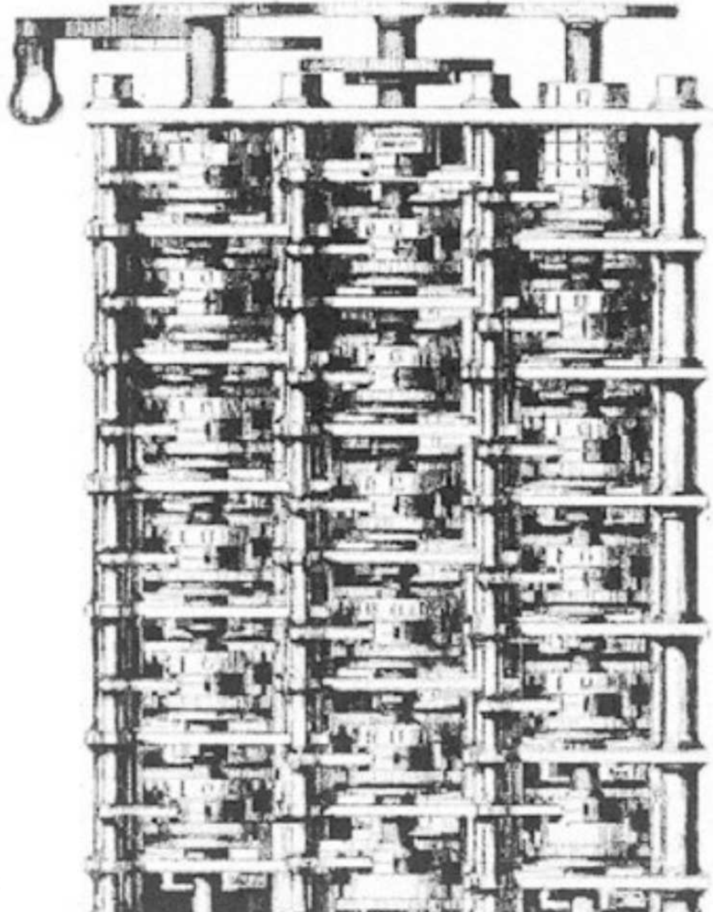
Les machines à calculer se présentent sous deux formes de base : la machine simple, à additionner (ou à soustraire) et les calculateurs (calculatrices maintenant) qui non seulement peuvent faire des multiplications et des divisions…

… MAIS S'ACQUITTENT AUSSI BIEN DE NOMBREUSES AUTRES FONCTIONS.

Nous devons l'invention, en 1642, de la première machine à additionner au Français **Blaise Pascal** (1623–1662), capable d'additionner et de « poser » un chiffre (pour le calcul de la dizaine supérieure). En 1671, le mathématicien et philosophe allemand **Gottfried Wulhem von Leibniz** (1646–1716) a proposé un dispositif capable de multiplier en procédant par des additions successives.







En 1822, l'inventeur et mathématicien britannique **Charles Babbage** (1792–1871) a construit une petite machine à additionner. Dix ans plus tard, il conçoit une « machine à différences » (les nombres entiers et base 10 étant représentés par des roues dentées ; son fonctionnement est fondé sur des « différences finies » qui permettent de résoudre des multiplications par additions successives). Par la suite, il envisage un « engin analytique » qui n'a jamais été assemblé (en raison du coût notamment). Une réplique partielle existe et peut être vue au *Science Museum* de Londres.



Les équations

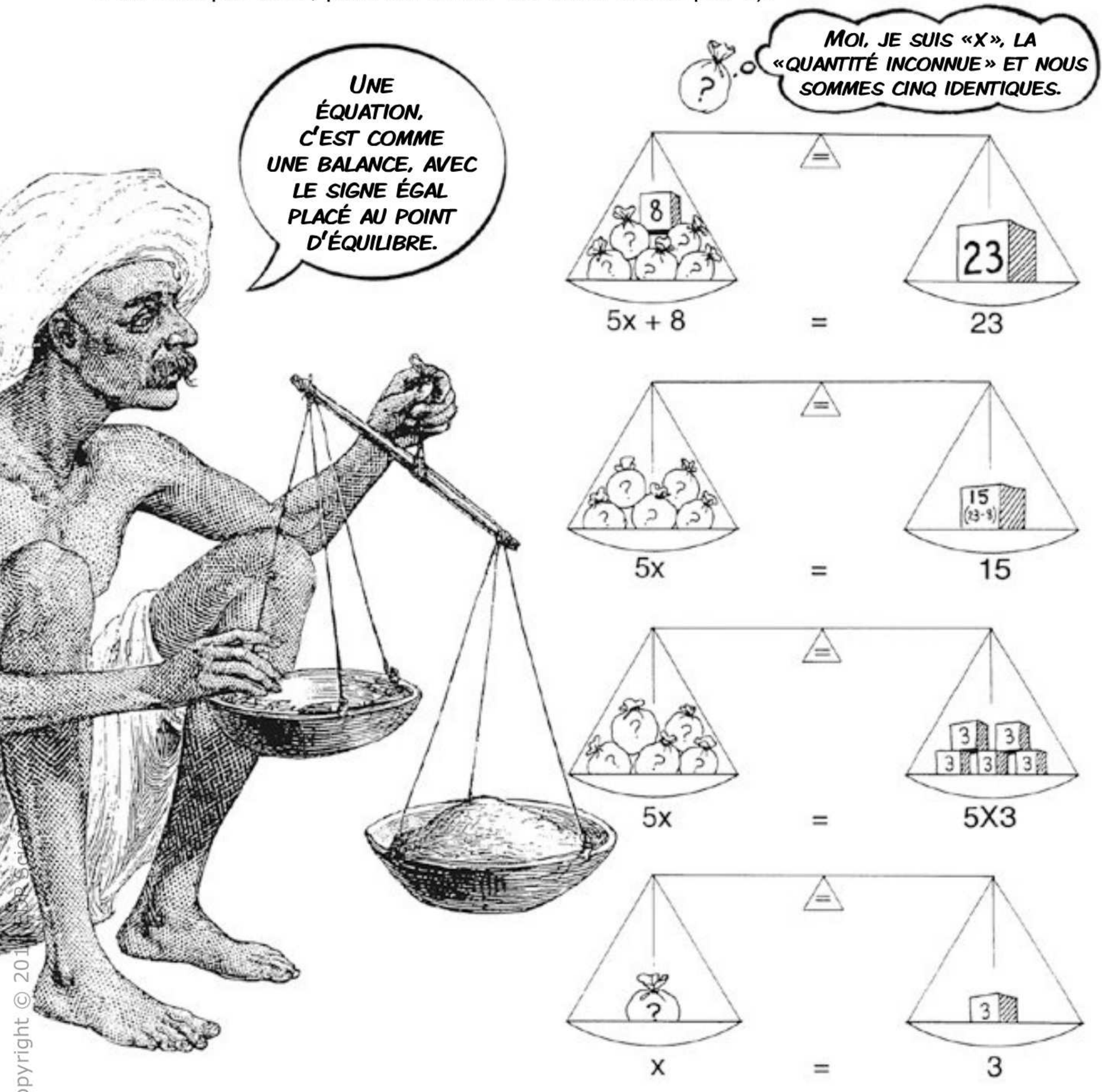
Les équations constituent le cœur des mathématiques. À la seule exception d'opérations arithmétiques très élémentaires, on se sert d'équations dans toutes les disciplines des mathématiques théoriques et appliquées, ainsi que dans les sciences physiques, sociales et la biologie.

Comme son nom l'indique, une équation énonce une égalité entre deux expressions. Elle implique des quantités inconnues ; en général, nous les appelons « **variables** » tandis que d'autres valeurs sont des « **constantes** », ou bien des **paramètres**. Les équations peuvent encore servir à définir les quantités elles-mêmes ou à exprimer des rapports entre variables.



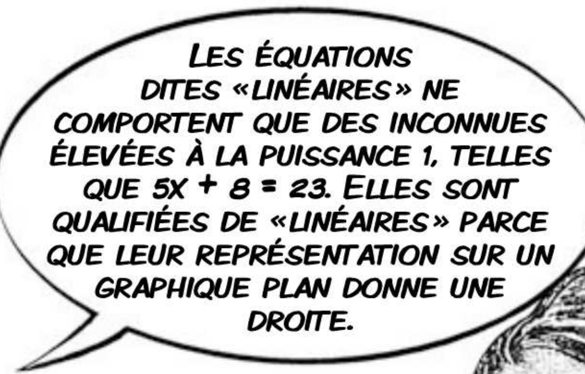
Avant même que soit inventé le concept de l'équation, des problèmes mathématiques ont été résolus au moyen de méthodes ingénieuses et compliquées. De nos jours, ils sont « réduits » à une forme très simple.

Dans l'équation $5x + 8 = 23$, x est l'inconnue qu'il faut trouver par le calcul. On peut y parvenir avec des essais, « au pifomètre » dirions-nous, jusqu'à obtenir la bonne réponse, ou effectuer de simples opérations (on soustrait 8 de chaque côté, puis on divise les deux côtés par 5).



L'équation est « satisfaite », ou résolue, avec $x = 3$, puisque les deux côtés de l'équation sont toujours égaux.

Dès lors que toute valeur des variables résout une équation, celle-ci s'appelle une **identité**. Par exemple, l'équation $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ est une identité puisqu'elle reste satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées aux inconnues. De telles identités se révèlent très utiles pour des manipulations algébriques, dans la mesure où elles permettent de remplacer une formulation complexe par une forme plus simple.


Les équations dites « linéaires » ne comportent que des inconnues élevées à la puissance 1, telles que $5x + 8 = 23$. Elles sont qualifiées de « linéaires » parce que leur représentation sur un graphique plan donne une droite.
Les équations dites « quadratiques » ont une variable élevée à la puissance 2. Ces équations possèdent toujours deux racines (ou solutions), soit différentes soit égales. Par exemple, les équations $x^2 = 4$ et $2x^2 - 3x + 3 = 5$ sont toutes les deux « quadratiques », avec pour solution (+2, −2) et (+2, −1/2) respectivement. Un cas de deux racines égales est donné par $x^2 - 4x + 4 = 0$, les deux solutions étant 2.

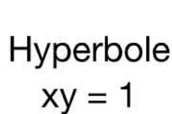

Les équations cubiques possèdent une variable élevée à la puissance 3. De telles équations ont toujours trois racines, quand bien même deux voire trois parmi elles sont identiques (et deux mais jamais trois peuvent être complexes). Un exemple d'équation cubique est $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ avec comme solutions les racines 1, 2 et 3.

Les équations linéaires, quadratiques et cubiques sont qualifiées de premier, second et de troisième degré respectivement. Jusque l'équation appelée « quartique » (4e degré), il est possible d'exprimer les racines par des formules qui font appel à des racines arithmétiques ou à des racines carrées. Ainsi, pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, la formule s'écrit :



Il n'y a pas de limites au nombre de degrés des équations algébriques. Cependant, au 5e degré, pour ce que l'on appelle les équations « quintiques », les mathématiciens ont essayé pendant des siècles de trouver des formules arithmétiques et des racines carrées, comme celle de la page 45. Ce n'est finalement qu'au début du XIXe siècle que l'on en a démontré l'impossibilité.

Des équations peuvent comporter plus d'une variable dans chaque terme. Par exemple, l'équation $xy = 1$, somme toute assez basique, sert à décrire graphiquement les hyperboles.



Hyperbole
$xy = 1$

Le degré d'une équation se définit comme la somme des puissances des variables dans le terme aux puissances les plus élevées. Par exemple, dans l'équation $ax^5 + bx^3y^3 + cx^2y^5 = 0$, le terme aux puissances les plus élevées est cx^2y^5.



Normalement, une équation avec deux variables n'a pas de solution. Mais, s'il y a autant de formules que de variables, on a une chance de parvenir à trouver une solution pour chaque variable. Un système d'équations simultanées comporte donc deux ou davantage d'équations avec deux ou plus d'inconnues. Parfois, on peut les résoudre par de simples manipulations.

Prenons, pour illustrer cette possibilité :

1. $2x + xy + 3 = 0$
$x + 2xy = 0.$

2. Si nous multiplions la première équation par 2, on obtient :
$4x + 2xy + 6 = 0.$

3. Et si nous soustrayons la seconde équation, on obtient :
$3x + 6 = 0.$

4. Ainsi, nous pouvons conclure que $x = -2$.

À présent, si nous substituons la valeur –2 dans la première équation, on obtient $y = -1/2$.

Parfois, on réussira à résoudre des équations simultanées plus complexes en procédant de la même manière.



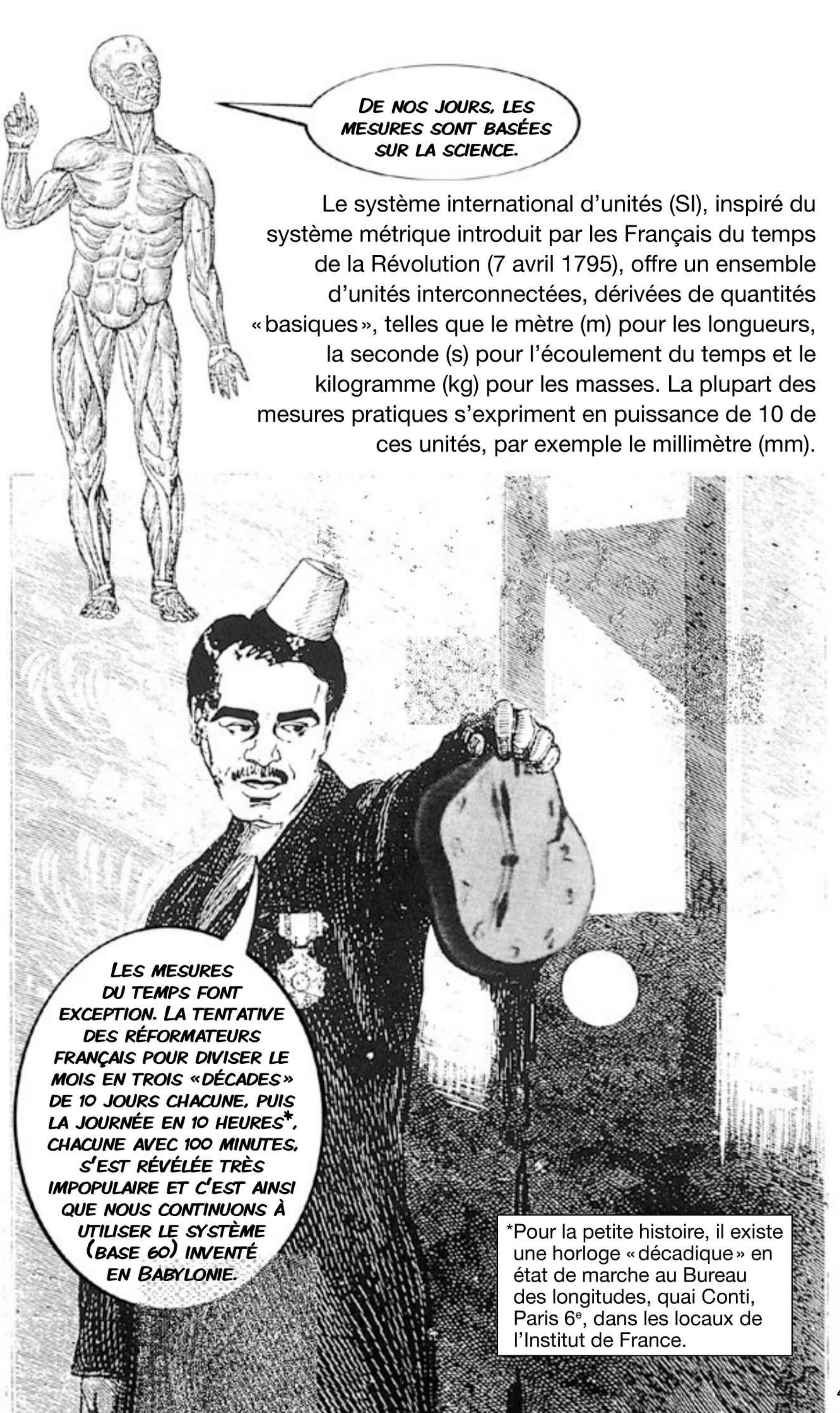
Les mesures



Les mesures font partie intégrante des mathématiques. Nous mesurons tout, depuis le temps aux dimensions, poids et volumes, tailles ou altitudes, électricité, chaleur, lumière – et même la distance aux étoiles et les énergies des particules subatomiques. Nous savons même mesurer l'intelligence et la valeur des bonnes choses, comme l'environnement.

Les premiers étalons de mesure étaient donnés par la paume de la main (l'empan) ...

... le pied et la longueur de l'avant-bras, depuis le coude jusqu'au bout du majeur, connu du temps des Égyptiens comme la coudée royale.



Le système international d'unités (SI), inspiré du système métrique introduit par les Français du temps de la Révolution (7 avril 1795), offre un ensemble d'unités interconnectées, dérivées de quantités « basiques », telles que le mètre (m) pour les longueurs, la seconde (s) pour l'écoulement du temps et le kilogramme (kg) pour les masses. La plupart des mesures pratiques s'expriment en puissance de 10 de ces unités, par exemple le millimètre (mm).

*Pour la petite histoire, il existe une horloge « décadique » en état de marche au Bureau des longitudes, quai Conti, Paris 6e, dans les locaux de l'Institut de France.

Chacune des unités du SI possède une définition précise et des protocoles de mesure soumis au contrôle des comités internationaux officiels (par le biais du Bureau international des poids et mesures). Les définitions évoluent et sont mises à jour chaque fois que de meilleures méthodes apparaissent.



De nombreux pays conservent encore le vieux système des mesures « impériales » : la livre (poids), le yard (toise), la pinte et les quarts (1 quart = 2 pintes). Mais attention, la pinte US, le quart US et le gallon US ne font que les 4/5 de leurs équivalents britanniques ; de même que les voitures américaines, qui ont la réputation d'engloutir l'essence et affichent un ratio bas de miles/gallon…

Compter et calculer traitent de quantités différentes, discrètes et qui n'impliquent que des nombres exacts. Par opposition, la mesure traite d'ordres de grandeur continus. Aucune mesure n'est exacte. Quand nous comparons l'objet que l'on mesure à un étalon, nous faisons toujours une interpolation entre les points sur l'échelle la plus fine. Et tout rapport d'une mesure complexe doit (ou devrait) inclure une « barre d'erreur » qui indique la marge d'incertitude associée à la mesure.

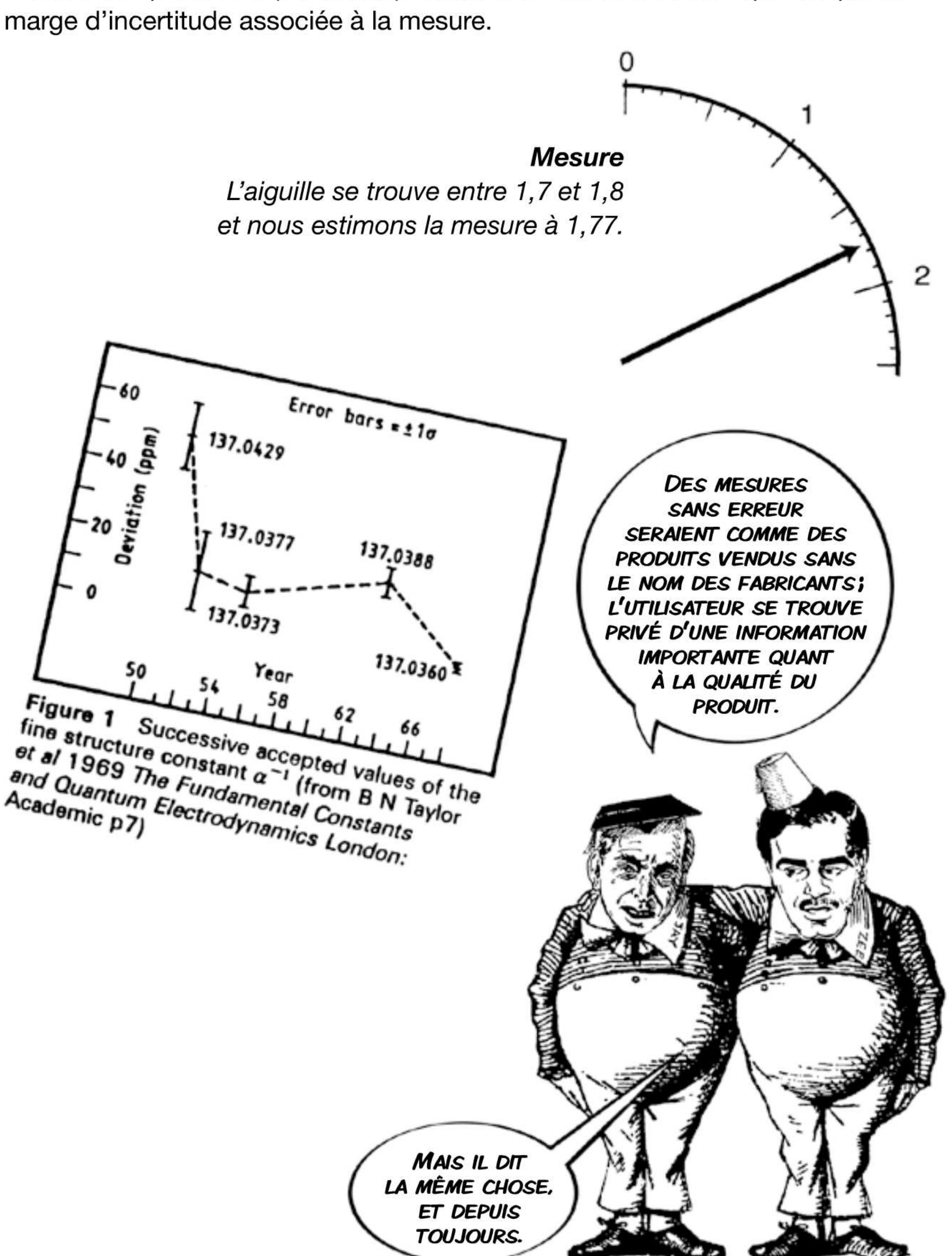
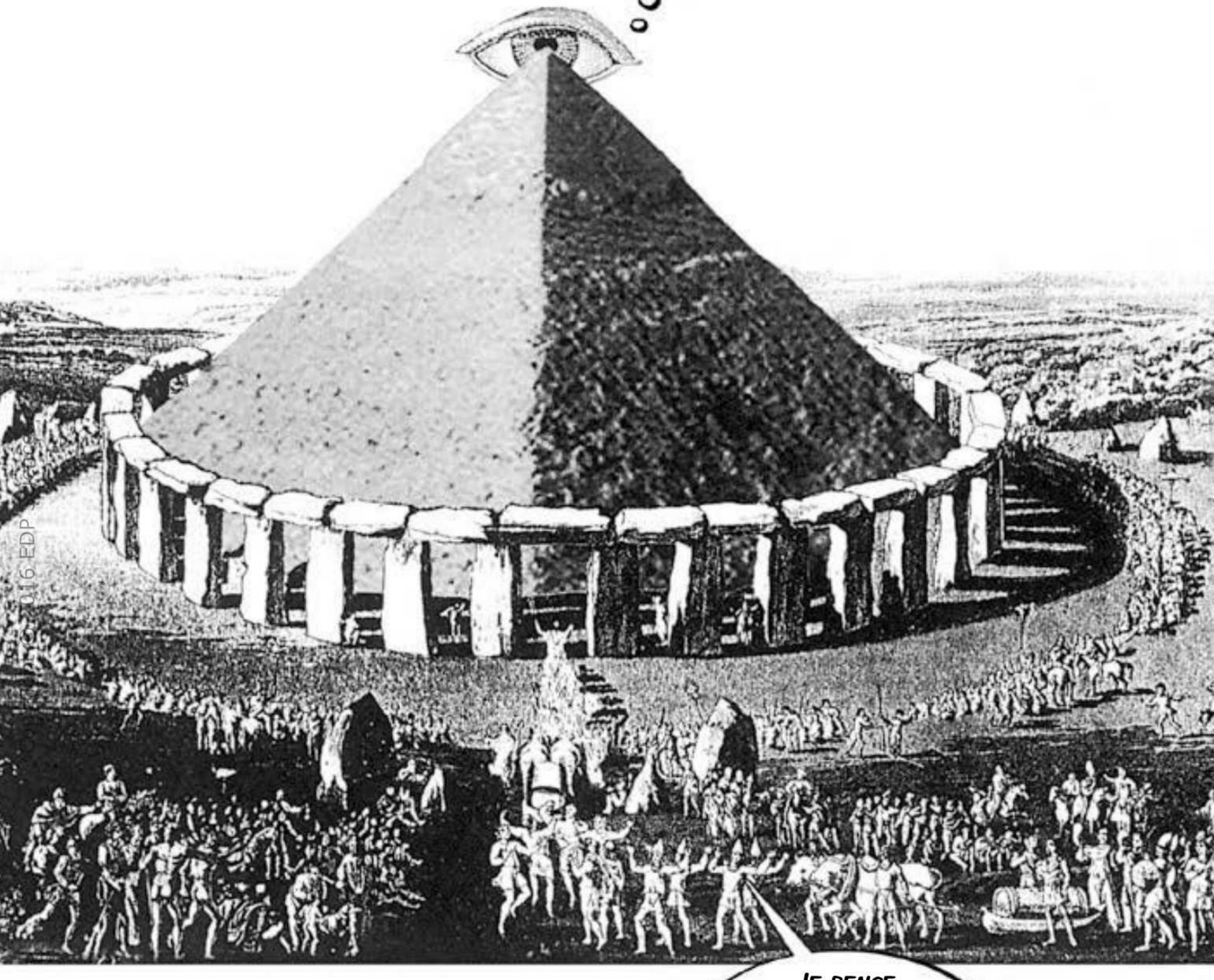


Figure 1 Successive accepted values of the fine structure constant α^{-1} (from B N Taylor *et al* 1969 *The Fundamental Constants and Quantum Electrodynamics* London: Academic p7)

Depuis la Préhistoire, les mesures ont servi à construire des édifices. Les archéologues ont découvert, par exemple, que d'anciens monuments comme Stonehenge possédaient des alignements précis par rapport à des événements astronomiques et que la conception de leurs plans au sol faisait appel à des constructions géométriques. Les églises de l'Europe médiévale enfermaient ainsi de subtiles proportions de dimensions, si bien que pendant toute la période de la Renaissance, la théorie de la « proportion divine » sous-tendait l'architecture et l'art. La construction des grandes pyramides d'Égypte présentait un défi de compréhension pour des générations d'archéologues.



Les mathématiques du design offrent un lien entre mathématiques appliquées et «théoriques» dont disposaient déjà la civilisation de la Grèce antique.

Pour pouvoir marquer un plan au sol, il est très utile de savoir construire un angle droit, comme le coin d'un carré par exemple.

Les Babyloniens savaient bien que certains triangles contenaient un angle droit.

Si les côtés sont de 3, 4 et 5 ou de 5, 12 et 13, alors le coin opposé à l'hypoténuse constitue un angle droit.

Ces nombres ont un rapport spécial, car $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $5^2 + 12^2 = 13^2$.

C'est qui le ringard ?

13
5
12
5
4
3

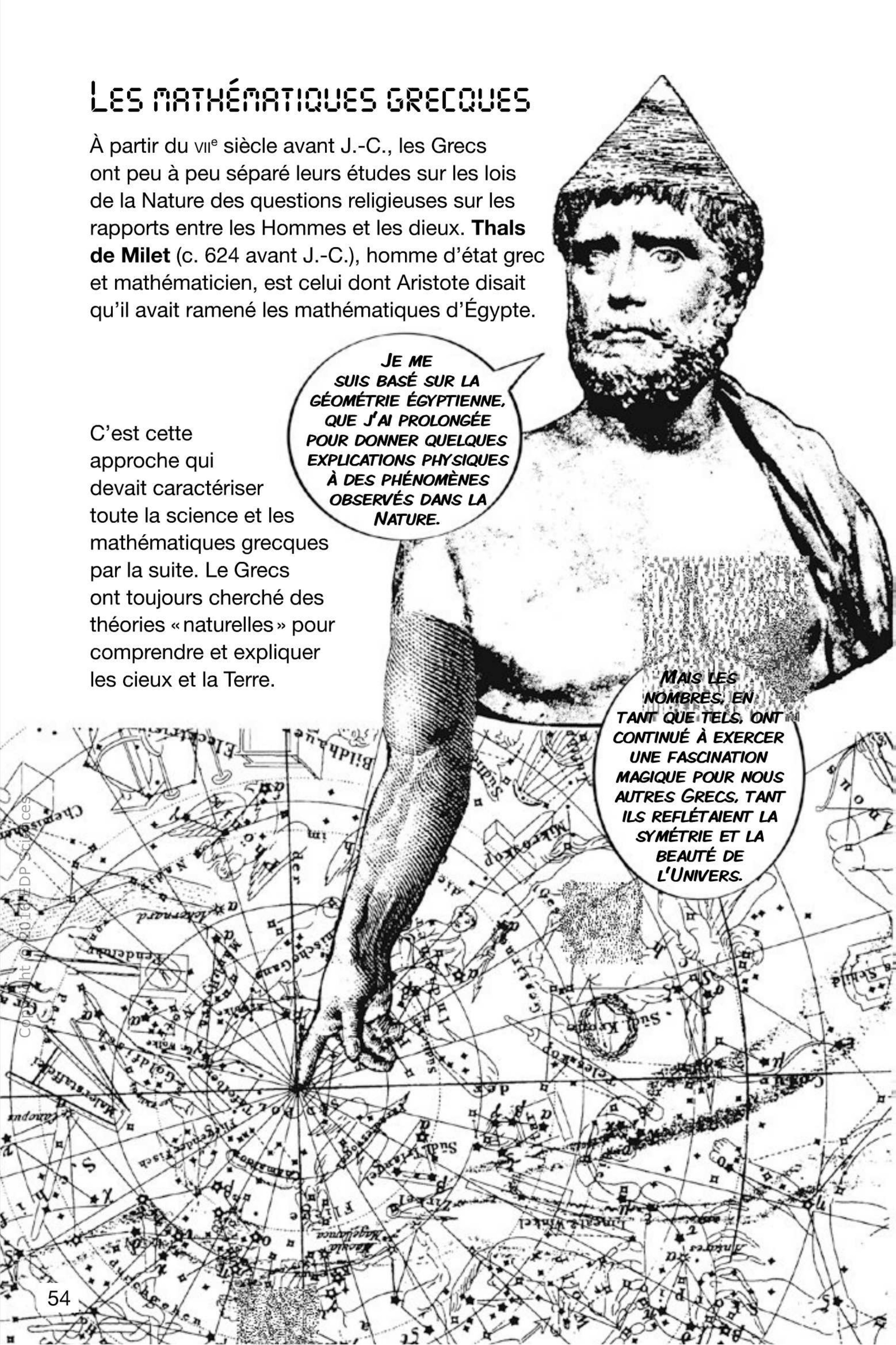
Les mathématiciens de Babylone avaient même produit des séries de tels « triplets » en appliquant sans doute une technique particulière de calcul pour y parvenir.

Mais ce sont les Grecs qui en ont fait un théorème.

Les mathématiques grecques

À partir du VIIe siècle avant J.-C., les Grecs ont peu à peu séparé leurs études sur les lois de la Nature des questions religieuses sur les rapports entre les Hommes et les dieux. **Thals de Milet** (c. 624 avant J.-C.), homme d'état grec et mathématicien, est celui dont Aristote disait qu'il avait ramené les mathématiques d'Égypte.

C'est cette approche qui devait caractériser toute la science et les mathématiques grecques par la suite. Le Grecs ont toujours cherché des théories « naturelles » pour comprendre et expliquer les cieux et la Terre.



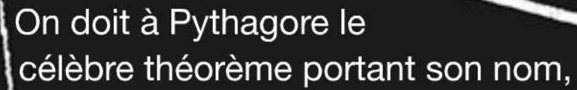


Pythagore

Moi, Pythagore (580-500 avant J.-C.), je n'étais pas un simple mathématicien. J'ai été leader de ma cité et j'ai fondé un culte mystique qui prônait la pratique d'exercices esthétiques et l'abstinence de certaines formes de nourriture et d'activités.

Ses condisciples avaient découvert que des harmonies simples en musique pouvaient être produites en combinant les sons d'instruments pouvant réaliser simultanément des rapports de longueur d'onde.

Cela nous a conduits à croire que les mathématiques reflétaient des rapports divins et la beauté elle-même – les nombres, avec leurs qualités magiques, renfermaient la réponse à toute question.



On doit à Pythagore le célèbre théorème portant son nom, qui énonce que « si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés » ; autrement dit : $a^2 + b^2 = c^2$. Comme nous venons de le voir, ce rapport des côtés était déjà connu, mais Pythagore était le premier à en esquisser une preuve générale. Bien que le récit du théorème n'ait été connu que quelques siècles après sa mort, cela correspond bien à ses efforts pour que les mathématiques ne soient pas considérées comme une étude pratique, mais qui aurait une portée philosophique.



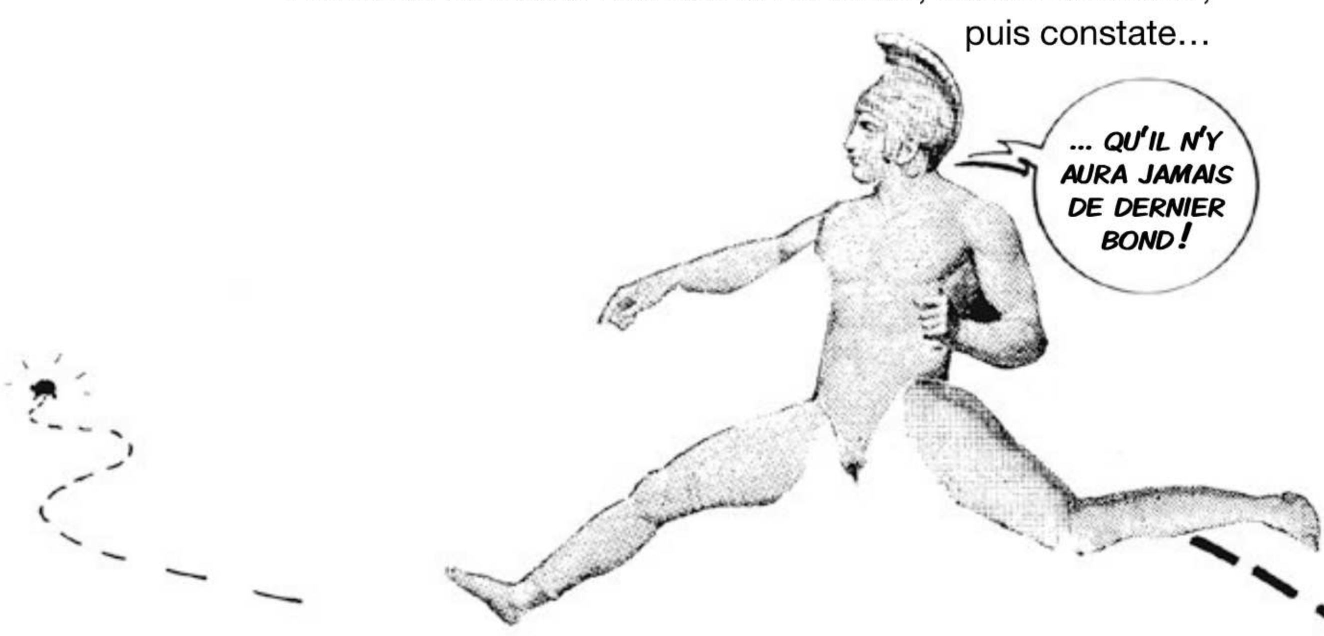
Les pythagoriciens admiraient des figures géométriques dites régulières, comme les polygones ou les « solides réguliers » (au nombre de cinq pour les formes convexes et pas une de plus). L'histoire veut que Pythagore en ait découvert trois : le tétraèdre (la pyramide, 4 faces et 8 arêtes), l'hexaèdre (le cube, 6 faces et 12 arêtes) et le dodécaèdre (12 faces et 30 arêtes). La légende veut que les mathématiciens de l'époque aient éprouvé une grande détresse en découvrant que certains rapports de ces figures ne pouvaient pas s'exprimer en nombres entiers. La « monstruosité » la plus facile à démontrer était le calcul de la diagonale d'un carré par rapport au côté ; maintenant nous disons que…

Les paradoxes de Zénon

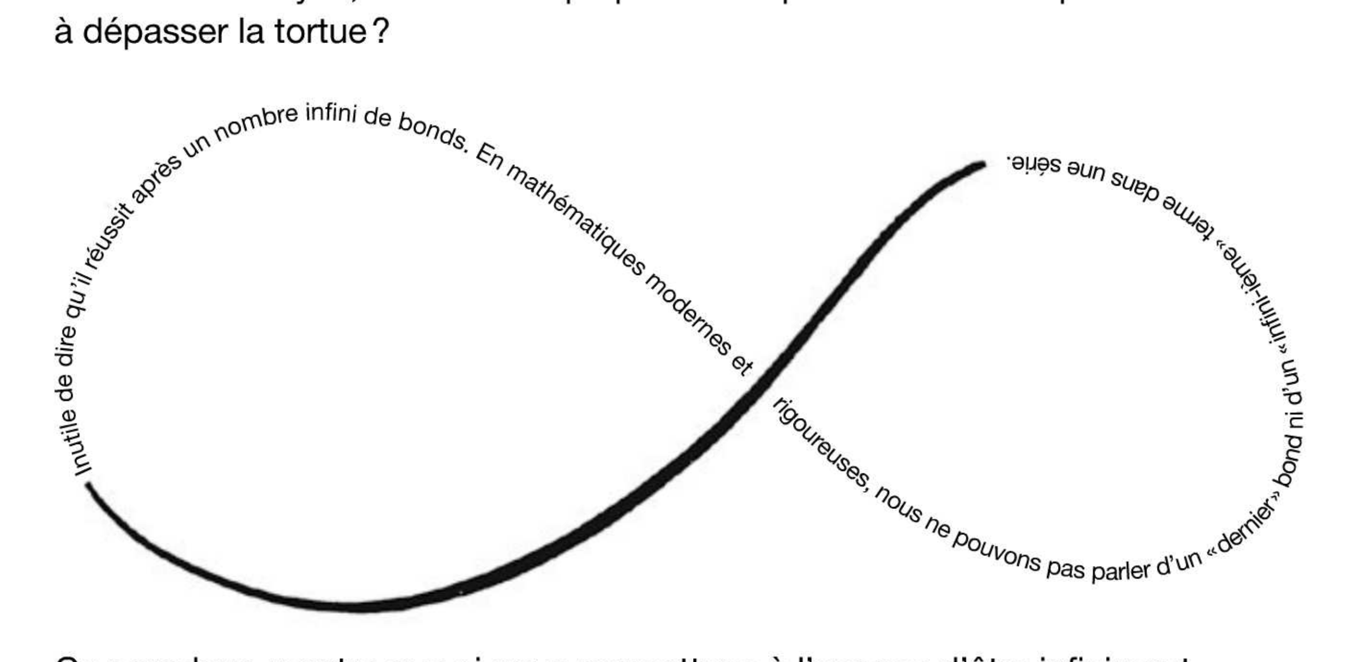
Je m'appelle Zénon d'Elée (490-430 avant J.-C.) et je suis devenu célèbre grâce à mes paradoxes où je défiais les fondements de notre façon de penser l'espace, le temps et le changement d'état.

Au moyen de quatre paradoxes, Zénon a essayé de démontrer que si nous concevons l'espace comme fini ou infiniment divisible, ou si nous considérons le mouvement comme simple ou relativiste, nous observerons inévitablement des paradoxes.

Le plus célèbre des paradoxes est celui d'Achille (champion de course à pied) qui poursuit une tortue. À chaque bond, il diminue de moitié l'avance de la tortue, encore et encore, puis constate…



Avec cette analyse, comment expliquer alors qu'Achille réussit quand même à dépasser la tortue ?



Ce paradoxe montre que si nous permettons à l'espace d'être infiniment divisible, nous aurons des paradoxes quand nous décrirons ces mouvements.

Zénon avait proposé trois autres paradoxes relatifs au mouvement et d'autres relatifs au changement en général. En voici un exemple. Supposons que vous ayez reçu les instructions suivantes…



Bien sûr, une telle goutte n'existe pas et, une fois le baril plein, nous dirions :

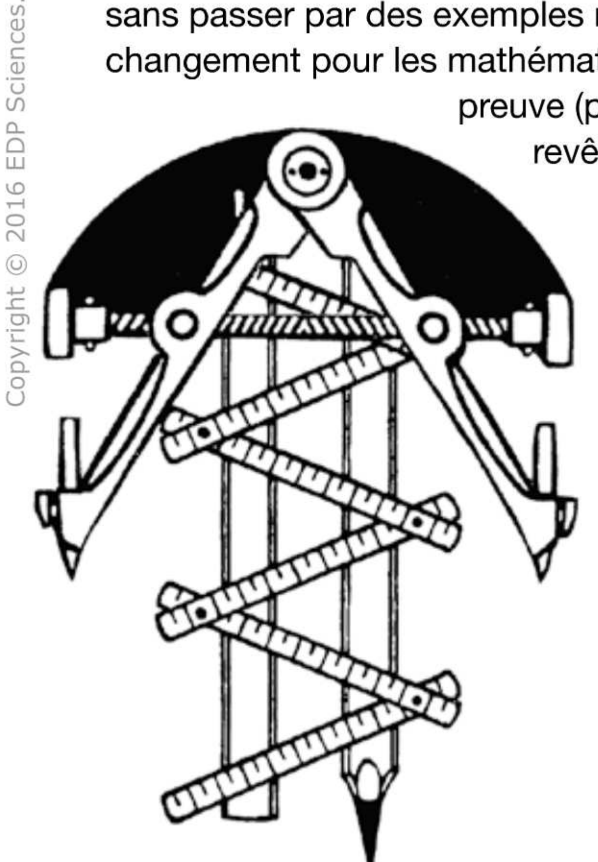
Toutefois, il nous est impossible de marquer le point de transition. Zénon argumente alors :

Les philosophes coururent après Zenon depuis le début, mais tout comme Achille, ils n'arrivent pas tout à fait à saisir leur proie. Peut-être Zénon avait-il quelque chose à nous dire sur nos concepts mathématiques. Nous aimerions croire que ces concepts sont clairs, mais peut-être sont-ils réellement contradictoires.

Euclide

MOI, EUCLIDE (323-285 AVANT J.-C.), SUIS LE PÈRE FONDATEUR DE LA GÉOMÉTRIE DÉMONSTRATIVE.

Ses idées devaient avoir un impact énorme sur les mathématiques occidentales et formaient la base de notre géométrie jusque très récemment. Euclide a rendu systématique la tradition de preuves basées sur des constructions, avec des instruments « idéaux » come la règle et le compas (pour dessiner des arcs de cercle). Avec la règle et le compas, il était possible de démontrer des vérités relatives aux figures et à leurs formes, sans passer par des exemples numériques. C'était déjà un très grand changement pour les mathématiques grecques – l'idée d'apporter une preuve (par une démonstration) qui, dans un sens, revêtait une valeur abstraite.



Dans ses travaux, Euclide a fourni ses célèbres fondations de la géométrie et a défini les constructions nécessaires et suffisantes pour constituer une preuve. (D'autres constructions plus complexes étaient déjà connues à l'époque et rendaient même la preuve plus facile à démontrer, mais elles n'étaient pas considérées comme « géométriques » ou pertinentes.) Après avoir défini ses termes, tel que le point ou la droite, Euclide a énoncé cinq notions de quantité et cinq postulats de construction.

Les notions communes d'Euclide

1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles $a = c,\ b = c,\ a = b$
2. Des quantités égales additionnées donnent des quantités toujours égales

   = + = = =

3. Des quantités égales soustraites l'une de l'autre donnent toujours des éqales

   = − = = =

4. Deux quantités qui coïncident sont égales
5. Le tout est plus grand qu'une partie



Les 6 postulats d'Euclide :

Dans un plan, il est admis

1. qu'on peut tracer une droite d'un point quelconque à un point quelconque,
2. qu'on peut prolonger indéfiniment une droite finie, dans les deux sens,
3. qu'on peut tracer un cercle, autour d'un point quelconque et avec un rayon quelconque,



4. on admet que tous les angles droits sont égaux entre eux,
5. et que si une droite, croisant deux autres droites, fait les angles intérieurs du même côté dont la somme est plus petite que deux angles droits, celles-ci prolongées, se rencontreront,
6. enfin que deux droites ne peuvent refermer l'espace.

Les trois premiers postulats définissent des méthodes de construction, mais les trois derniers sont en réalité des théorèmes. Le 5e postulat, appelé « postulat du parallélisme » était un défi constant pour des mathématiciens par la suite. À la longue, cependant, il est devenu la clef pour décrire d'autres formes de géométrie.



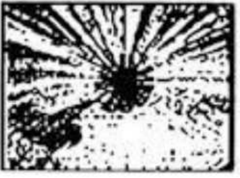







Sur cette base, Euclide a poursuivi son œuvre, déduisant tous les résultats géométriques connus de son temps, y compris le théorème de Pythagore. En dépit de leurs difficultés évidentes, ses axiomes furent réputés plus tard comme allant presque de soi et les conclusions qui en ont été tirées sont considérées comme autant de vérités. La géométrie était alors reconnue comme un magnifique exemple de connaissances véridiques auxquelles on ne pouvait accéder que par le seul raisonnement humain.

Après Euclide, les Grecs ont produit un autre très grand mathématicien, **Archimède** (287–212 avant J.-C.). C'est lui qui a astucieusement établi des méthodes pour mesurer les surfaces et les volumes de nombreux solides comme les sphères ou les cubes. Il a donné une valeur approximative à π…





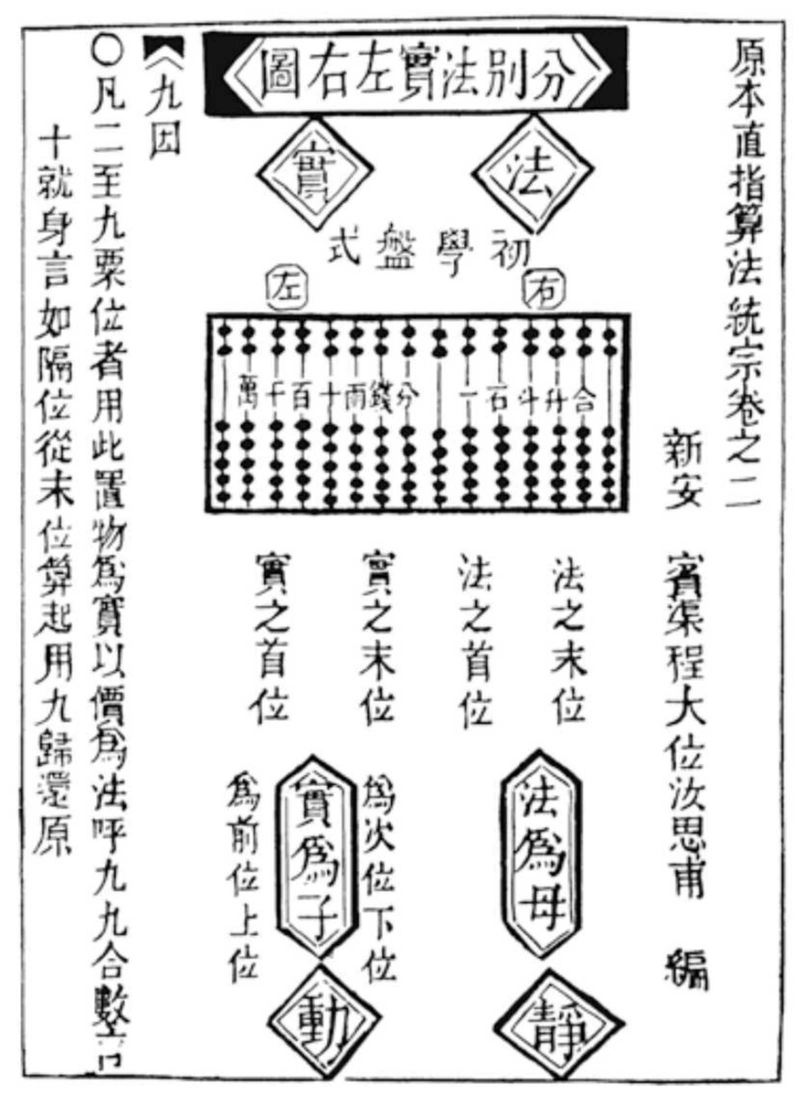
Les mathématiques chinoises

Les Chinois n'ont jamais jugé utile de développer le style formel des preuves que nous voyons dans Les *Éléments* d'Euclide, car ils n'étaient pas réellement intéressés par la logique formelle. Les Chinois s'intéressaient bien davantage aux applications pratiques et n'ont pas étudié les mathématiques *per se*.



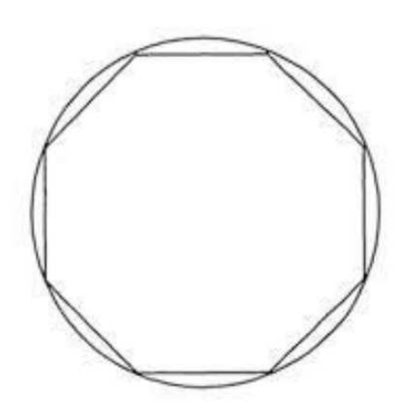
Cela ne les a pas empêchés d'inventer leur propre preuve pour la longueur des côtés d'un triangle droit, preuve bien différente de celle d'Euclide ; et, à la différence des Grecs, ils n'étaient pas trop dérangés par les surdes (nombres qui ne peuvent pas être exprimés sous la forme de ratio de deux entiers) ou par les nombres irrationnels. Pour exprimer un nombre négatif, les Chinois utilisaient simplement des bâtons rouges, et non noirs.

Les Chinois pratiquaient une algèbre sans recours à des symboles : ils exprimaient leurs idées *in extenso* avec des mots. Ils utilisaient l'abaque aussi bien pour les opérations algébriques que pour d'autres formes de calcul. Sous la dynastie Sung (960–1279), ils avaient mis au point une notation pour s'accommoder d'équations jusqu'à la 9e puissance (x^9). Ils étaient capables de résoudre des équations linéaires simultanées (avec deux ou plus d'inconnues) et des équations quadratiques.



Ils s'intéressaient aux « carrés magiques », dont l'addition du contenu des cases donne le même total que l'on prenne une ligne horizontale, une ligne verticale ou la diagonale. Ils ont même conçu, sur un principe identique, des cubes magiques.

Les Chinois s'enthousiasmaient à l'idée d'obtenir une valeur exacte pour π. **Liu Hui**, qui vivait au IIIe siècle après J.C., l'un des premiers mathématiciens chinois, en a donné une estimation au 4e chiffre après la virgule. Il a mis en œuvre la technique dite de « l'épuisement » en inscrivant un polygone dans un cercle ; en augmentant progressivement le nombre de côtés du polygone, ceux-là deviennent de plus en plus courts, de sorte que l'on peut assimiler le périmètre du polygone à la circonférence du cercle.



Au Ve siècle, le père **Tsu Ch'ung Chih** (429–500) et son fils **Tsu Keng-Chih** sont parvenus à la précision 3,141 592 6 et 3,141 592 7 respectivement, en appliquant la méthode d'Archimède des polygones inscrits (avec 24 576 arêtes). Cette précision n'a été atteinte en Occident qu'à la fin du XVIe siècle quand François Viète, en 1593, a su trouver une valeur exactement à mi-chemin entre les deux limites citées, soit 3,141 592 65.

Le livre *Chiu Chang*

Le Chiu Chang est le plus célèbre des livres sur les mathématiques chinoises. Nous en ignorons le nom de l'auteur et la date exacte de sa rédaction, mais nous pouvons supposer que le livre date de la fin de la dynastie Chin ou du début de celle des Han (1er siècle de notre ère). Les sujets que l'(es) auteur(s) traite(nt) sont :

- les arpentages (y compris des additions et soustractions de fractions), les proportions (pourcentages) ;
- les distributions de proportions (progressions arithmétiques et géométriques, règle de 3) ;
- les mesures de terrains (racines carrées et cubiques sur une base géométrique) ;
- un texte de référence pour les ingénieurs (les objets 3D) ;
- des impôts justes (le temps d'aller de a à b et la distribution) ;
- une section « trop » ou « pas assez » (des énigmes de distribution avec des « pièges ») ;
- la méthode des tables (résolution d'équations simultanées avec deux ou trois inconnues, à partir de tables) ;
- et, enfin, les triangles droits (24 problèmes à résoudre avec calculs de longueur de côtés).



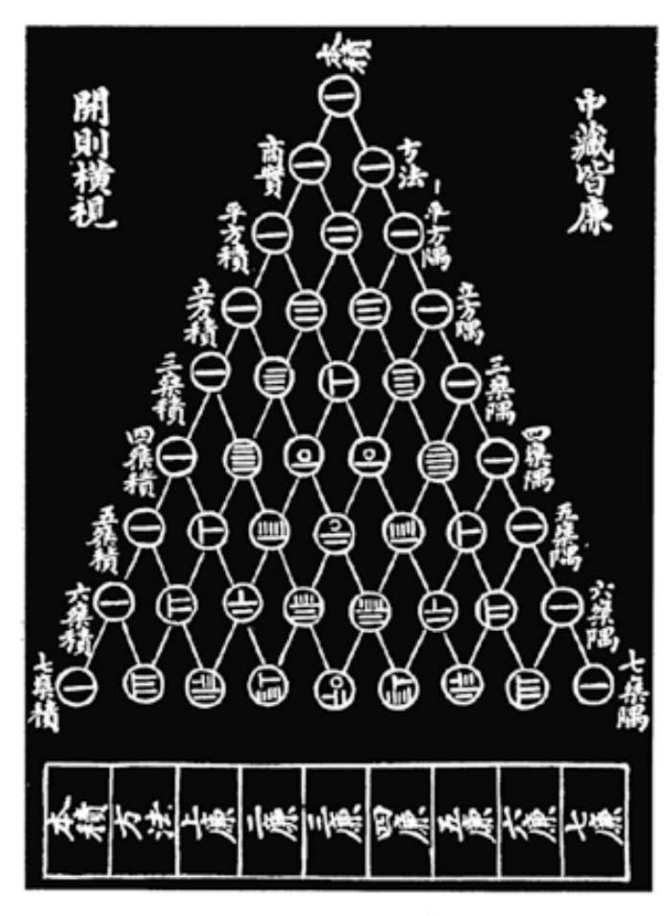
Quatre mathématiciens chinois

La seconde moitié du XIIIe siècle et le début du XIVe peuvent être considérés comme l'apogée des mathématiques chinoises. Quatre parmi les plus célèbres mathématiciens chinois vivaient à cette époque-là, à savoir :



Il y avait, en ces temps reculés, plus de trente écoles de mathématiques dans toute la Chine et la maîtrise des mathématiques étaient l'un des sujets obligatoires au concours d'admission à la fonction publique.

Chin Chiu Shao était l'un des meilleurs mathématiciens que la Chine ait jamais eu ; il a travaillé pour la fonction publique civile et militaire. Son livre, intitulé *Shu Chiu Chang* (Les neuf chapitres mathématiques), introduisait des idées nouvelles, comme, et pour la première fois, l'analyse dite indéterminée (étude des problèmes n'ayant pour solution que des nombres entiers).



Yang Hui et Chu Shih Chieh ont étudié les permutations et les combinaisons, et ont rédigé ce que nous appelons aujourd'hui le Théorème binomial. Ce sont des expressions qui impliquent le produit de deux termes (binôme) dans des expressions du type $(x + 1)$ et $(x + 3)$. Cela donne $x^2 + 4x + 3 = 0$. Plus on multiplie les expressions, plus grand sera le nombre de termes dans la solution, par exemple, $(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.





C'est ce constat qui a mené les deux mathématiciens à étudier ce que nous appelons aujourd'hui le triangle de Pascal. Leur découverte a consisté à noter une certaine régularité de séquence des préfixes des x. Les préfixes pour la puissance 1 (par exemple $(x + 1)$) sont 1, 1 ; ceux pour la puissance 2 sont 1, 2 et 1 ; ceux pour la puissance 3 sont 1, 3, 3 et 1, et ainsi de suite. Ces valeurs sont disposées ici à gauche dans la forme qu'avait imaginée Blaise Pascal au XVIIe siècle.

Le triangle de Pascal s'avère utile pour l'analyse des probabilités. La seconde rangée montre le nombre de permutations possibles quand on lance deux pièces d'argent. Il y a une façon de retrouver deux « faces », deux façons de retrouver une « face » et une « pile », et une façon de retrouver deux « piles ».



Sous la dynastie des Sung, il a été expliqué par le mathématicien **Chia Hsien** (c. 1100) et sa découverte en Chine remonte peut-être plus loin encore.



Tout comme les Chinois, les mathématiciens indiens avaient recours à toutes sortes de preuves, y compris des démonstrations visuelles qui n'avaient aucun rapport avec un quelconque système formel de déduction logique. Les mathématiques indiennes découlent d'un cadre de formalisme développé par les logisticiens et linguistes indiens. On identifie quatre phases bien distinctes des mathématiques en Inde.

La période Harappa, qui s'étend de 2500 avant J.-C. à environ 1000 avant J.-C., avec ce qu'il convient d'appeler des protomathématiques (notamment utiles pour les constructions en brique…).

La période védique, qui a duré 1 000 ans, traitait essentiellement de géométries rituelles. Les cultes du jaïnisme et du bouddhisme ont aussi pris leur essor pendant cette deuxième période.

La période suivante est qualifiée de « classique » et dure jusqu'à l'an 1000 de notre ère. Les mathématiciens de cette ère classique se préoccupaient de développer des concepts découverts plus tôt, tels que la théorie des nombres, les algorithmes et l'algèbre.

बाले मरालकुलमूल दलानिसप्त
तीरे विलास भरमंथरगाण्यपश्यम्
कुर्वंचकेलि कलहं कलहंसयुग्मम्
शेषं जले वदमरालकुल प्रमाणम्

Poème du mathématicien indien Bhaskara (cf. page ci-contre).

La dernière grande période des mathématiques indiennes, qui se déroule au Moyen Âge, est représentée par l'école de Kerala, période qui se termine dans les années 1500. C'est une école où des idées antérieures ont été poursuivies et développées brillamment. On ignore pourquoi cet essor des mathématiques a eu lieu au Kerala, mais il a été suggéré que cette école a influencé les mathématiques européennes, puisque des « découvertes » faites plus tard en Europe avaient en réalité été anticipées par les mathématiciens du Kerala trois siècles auparavant.

La géometrie Védique

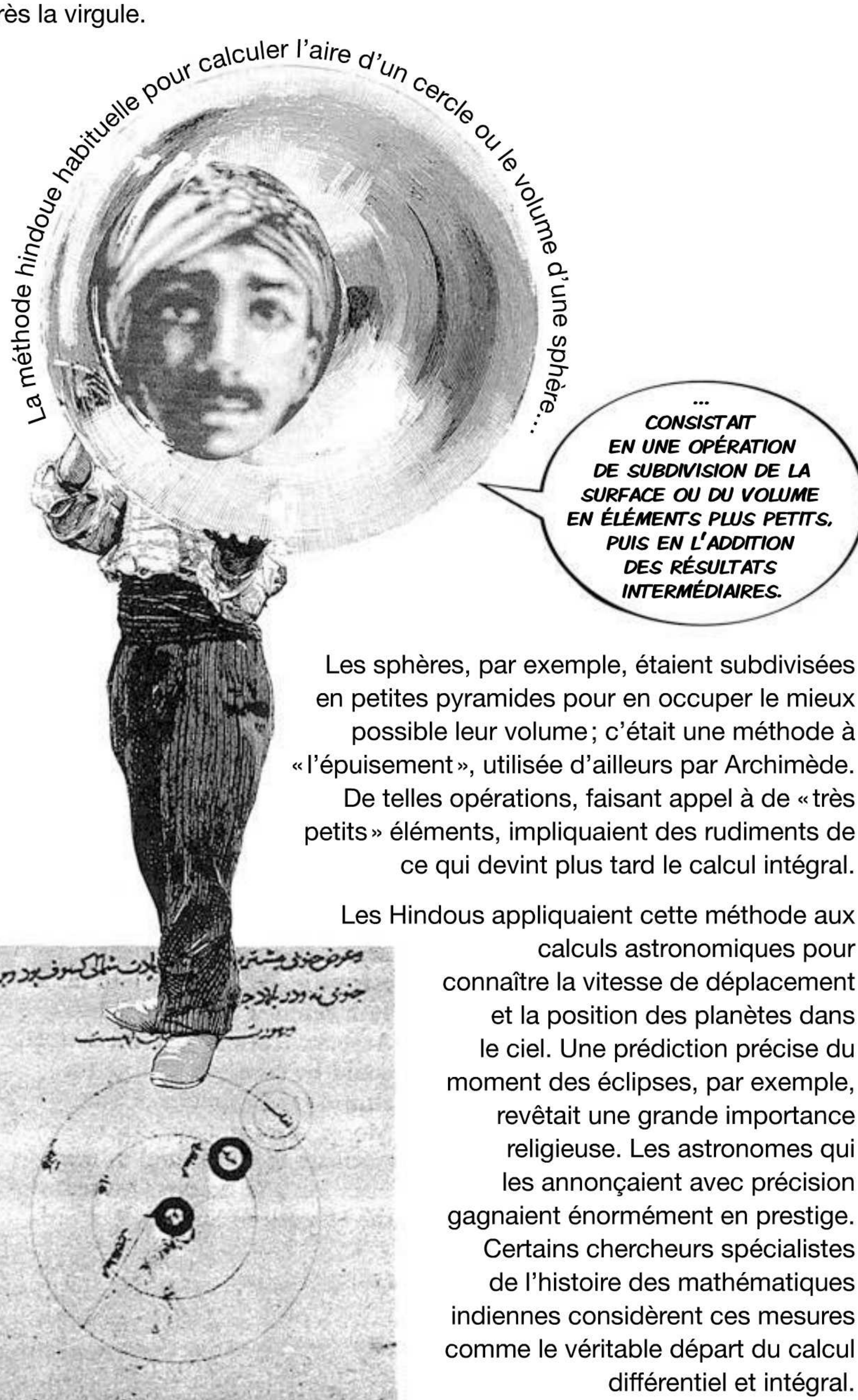
Les Hindous védiques adoraient les très grands nombres, qui sous-tendaient leurs croyances religieuses. Par exemple, des nombres, tel 100 milliards, étaient invoqués pour certaines cérémonies sacrificielles. Les Hindous avaient conceptualisé clairement les puissances de 10 – plus grand était le nombre choisi, plus il devenait intéressant à étudier.

La géométrie des autels donne un aperçu de l'algèbre en vogue chez les Hindous védiques. Selon l'un des schémas religieux, l'autel devait être un trapézoïde isocèle et ses côtés devaient soit être augmentés soit diminués, en fonction de la cérémonie prévue.

Cette contrainte créait un problème pour les religieux et exigeait des solutions algébriques. Les religieux bâtisseurs disposaient de règles de construction et des questions ayant un rapport au nombre de briques nécessaires pour modifier la forme de l'autel furent soulevées. Ils devaient pouvoir décider du nombre exact de briques à utiliser, de sorte qu'il n'y ait pas d'asymétrie d'une couche de briques à l'autre ; c'est cela qui les a conduits à recourir à des équations simultanées.



Les mathématiciens hindous avaient calculé π correctement jusqu'au 4e chiffre après la virgule.



Les sphères, par exemple, étaient subdivisées en petites pyramides pour en occuper le mieux possible leur volume ; c'était une méthode à « l'épuisement », utilisée d'ailleurs par Archimède. De telles opérations, faisant appel à de « très petits » éléments, impliquaient des rudiments de ce qui devint plus tard le calcul intégral.

Les Hindous appliquaient cette méthode aux calculs astronomiques pour connaître la vitesse de déplacement et la position des planètes dans le ciel. Une prédiction précise du moment des éclipses, par exemple, revêtait une grande importance religieuse. Les astronomes qui les annonçaient avec précision gagnaient énormément en prestige. Certains chercheurs spécialistes de l'histoire des mathématiques indiennes considèrent ces mesures comme le véritable départ du calcul différentiel et intégral.

Brahmagupta

L'algèbre est apparue comme une branche distincte des mathématiques à l'époque de **Brahmagupta** (c. 598), l'un des plus grands mathématiciens indiens. Il a rédigé un traité incluant une analyse des racines carrées et cubiques, les règles de 3, de 5, de 7, etc., et la pratique du troc. De son vivant, les équations ont été réparties en groupes que nous reconnaîtrions aujourd'hui : les équations simples (*yavat-tavat*), les quadratiques (*varga*), les cubiques (*ghana*) et les bi-quadratiques (*varga-varga*). De nombreux savants ont commenté son œuvre et ont fait passer ses idées au travers des âges.



Comme la plupart des Hindous védiques, Brahmagupta adorait les nombres irrationnels comme √2 et a fourni les valeurs correspondantes, jusqu'à un haut degré de précision.

Les nombres Jaïns

Tout comme les Hindous védiques, les Jaïns s'intéressaient aux très grands nombres – et ils y réfléchissaient de façon originale. Ils ont avancé que les nombres se répartissaient en trois groupes : les « énumérables », les « non-énumérables » et l'infini. Chacun de ces groupes est subdivisé en trois. Le premier groupe comprend les nombres les plus bas, les nombres les plus élevés et les nombres dits intermédiaires ; le deuxième groupe contient presque exclusivement des non-énumérables tandis que le troisième groupe contient les « presque infinis », les « vraiment infinis » et l'infiniment infini. Les mathématiciens européens n'ont pas atteint ces sommets-là avant les travaux de Cantor, il y a un siècle.



Mahaviracharya (c. 850), un mathématicien Jaïn, intègre des nombres négatifs dans ses travaux et a même fait mention du zéro.

Les combinaisons Védiques et Jaïnes

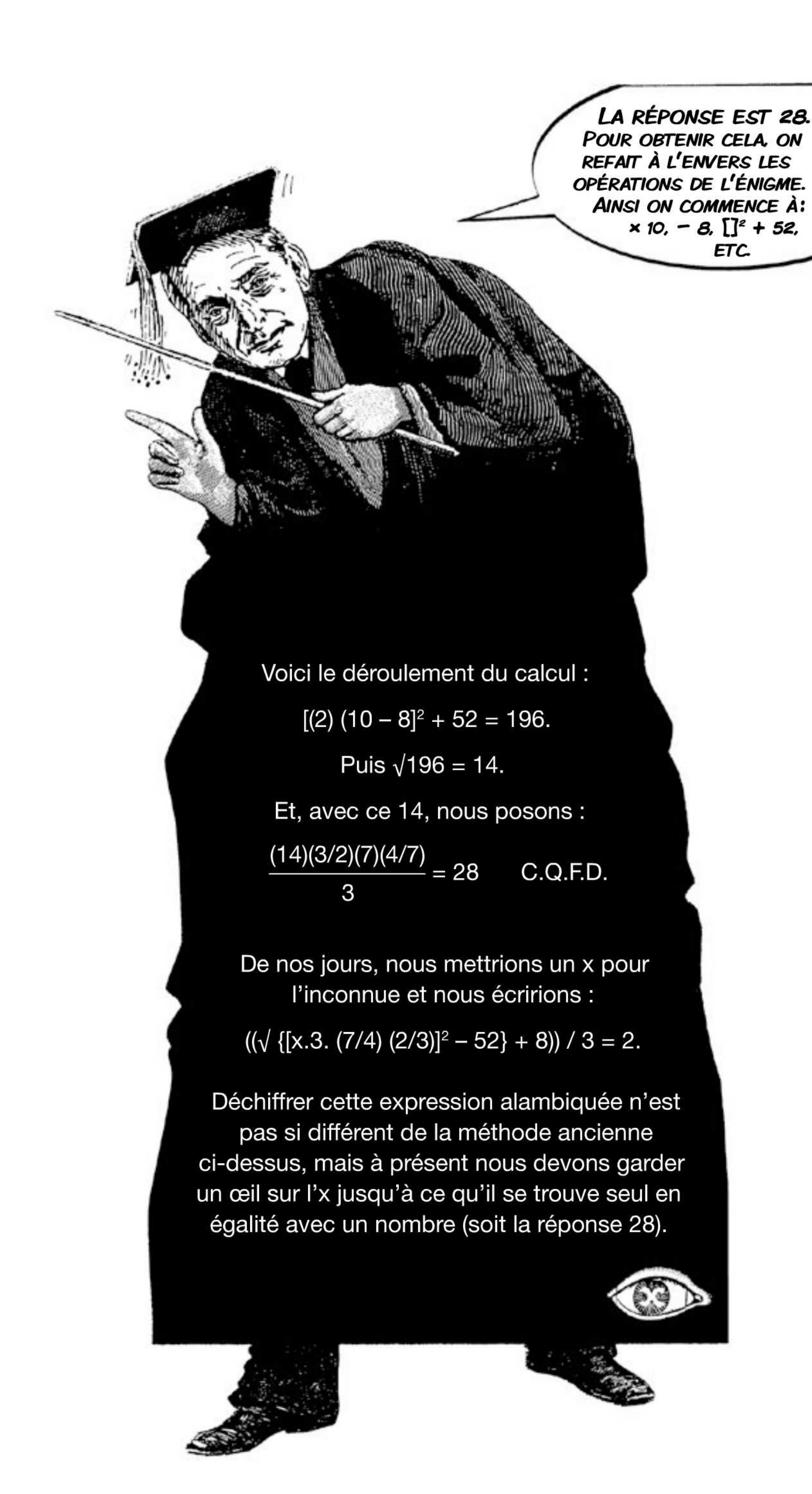
Les Hindous védiques et les Jaïns aimaient jouer avec les combinaisons. Une source qui expliquerait peut-être cet intérêt se trouvait dans la métrique de leur poésie et les variations des vers védiques. Certains vers avaient six syllabes, certains étaient plus longs (par exemple 8, 9, 11 ou 12 syllabes). Le défi consistait à alterner les sons longs et les sons courts dans chaque groupe de syllabes et à révéler les combinaisons possibles – par exemple, le nombre total de parfums que l'on peut assembler à partir de douze essences, prises simultanément une à la fois, ou deux par deux, ou trois par trois.

Bhaskara II (c. 1114) a utilisé correctement le zéro dans ses démonstrations arithmétiques et algébriques. Pour l'algèbre, en l'occurrence, il utilisait des signes et des lettres pour désigner les inconnues. Il a étudié des problèmes assez complexes dans la théorie des nombres et on lui attribue la plantation des « germes du calcul intégral moderne ».

La poésie mathématique

Les idées mathématiques en Inde se transmettaient souvent oralement sous forme de vers. Les énigmes mathématiques en vers sont monnaie courante, même de nos jours. En voici une, bien connue :





Voici le déroulement du calcul :

$[(2)\ (10 - 8]^2 + 52 = 196.$

Puis $\sqrt{196} = 14$.

Et, avec ce 14, nous posons :

$$\frac{(14)(3/2)(7)(4/7)}{3} = 28 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

De nos jours, nous mettrions un x pour l'inconnue et nous écririons :

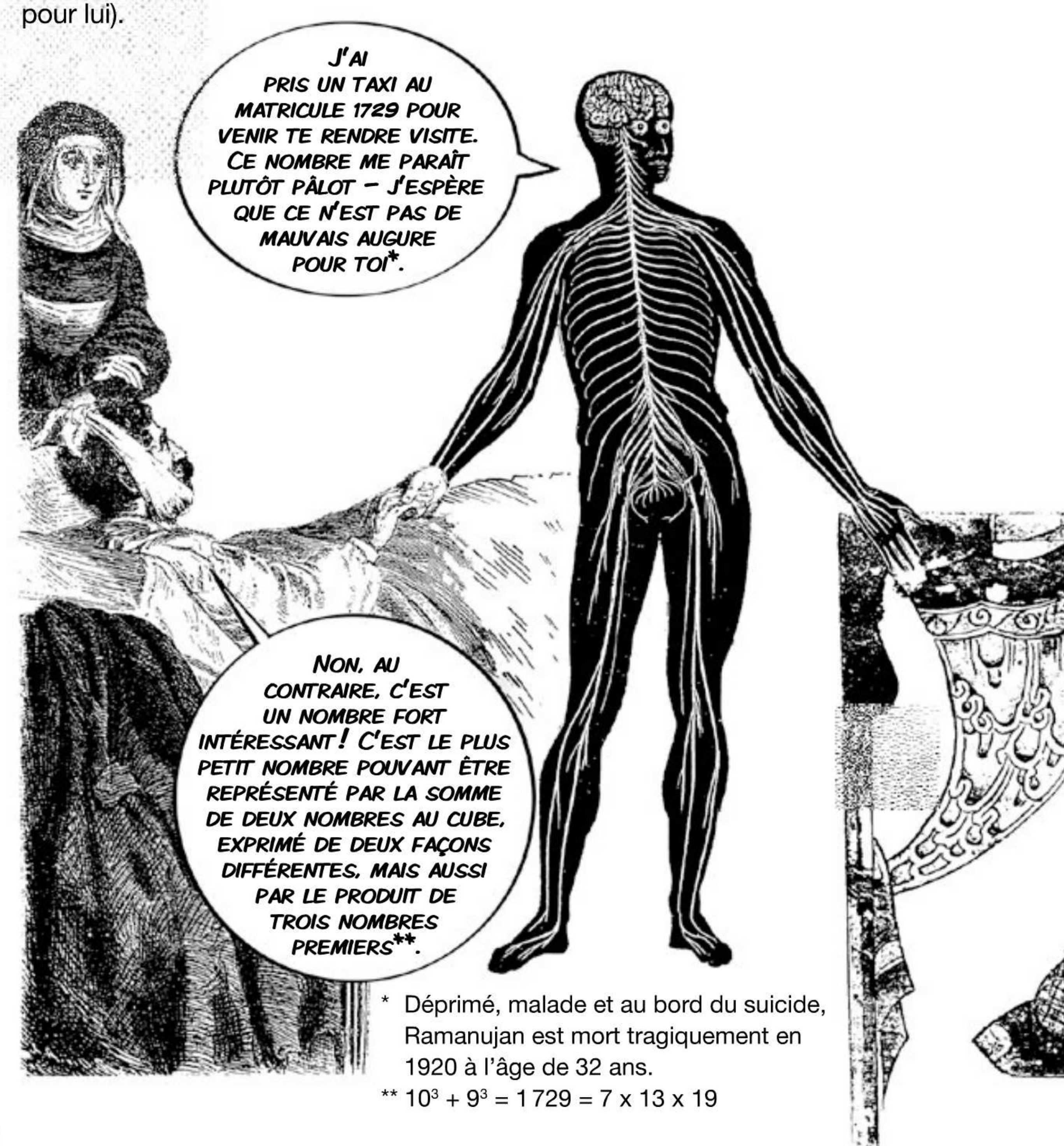
$$((\sqrt{\{[x.3.\ (7/4)\ (2/3)]^2 - 52\}} + 8))\ /\ 3 = 2.$$

Déchiffrer cette expression alambiquée n'est pas si différent de la méthode ancienne ci-dessus, mais à présent nous devons garder un œil sur l'x jusqu'à ce qu'il se trouve seul en égalité avec un nombre (soit la réponse 28).

Ramanujan

L’histoire des mathématiques indiennes foisonne d’exemples de mathématiciens intuitifs. Ainsi, **Srinvasa Ramanujan** (1887–1920) n’a connu que des échecs du point de vue universitaire mais, cependant, s'est révélé être un mathématicien brillant. Humble comptable de métier mais totalement traditionnel, Ramanujan fondait ses travaux autant sur le mysticisme et la métaphysique que sur des concepts abstraits. Cela dépasse l’entendement de vouloir comprendre comment il est arrivé à ses résultats, brillants, approfondis mais parfois erronés.

Son mentor britannique, le mathématicien **G. H. Hardy** ((1877 – 1947) lui a rendu visite un jour à l’hopital, en empruntant un taxi, N° 1729 (nombre inintéressant pour lui).



* Déprimé, malade et au bord du suicide, Ramanujan est mort tragiquement en 1920 à l’âge de 32 ans.

** $10^3 + 9^3 = 1\,729 = 7 \times 13 \times 19$

Les mathématiques Arabes

Les Arabes ont « unifié » la pensée mathématique des civilisations antérieures, combinant les traditions arithmétiques et algébriques de la Babylonie, de l'Inde et de la Chine avec les traditions géométriques grecques et du monde hellénique en général. Par conséquent, les mathématiciens arabes étaient très à l'aise en maniant tant les entiers que les fractions – intervertissant des nombres à base 10 et ceux à base 6 –, l'extraction de racines carrées et les opérations avec des nombres irrationnels, l'extraction de racines cubiques, l'élaboration de coefficients binomiaux et l'extraction de racines d'ordre 4 et davantage.

LES MATHÉMATICIENS ARABES ONT À LEUR ACTIF DEUX GRANDES RÉUSSITES.

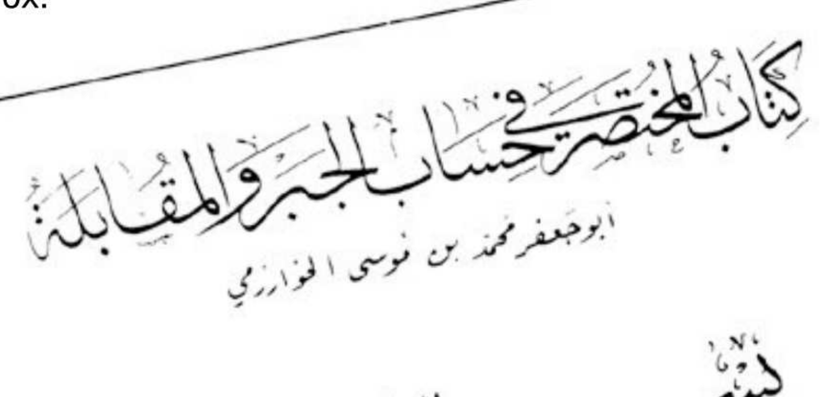
LA PREMIÈRE EST L'ÉTABLISSEMENT DE L'ALGÈBRE, QU'ILS APPELAIENT L'ART SCIENTIFIQUE, LA SECONDE EST LA DÉCOUVERTE DE LA TRIGONOMÉTRIE.

Al-Khuwarazmi

Muhammad bin Musa Al-Khwârizmi (environ 780-850) était le père fondateur de l'algèbre que nous connaissons tous aujourd'hui. Le terme même d'« algèbre » provient du mot arabe al-jabr (الجبر, « la réunion de morceaux cassés ») que l'on trouve dans le titre de son ouvrage *Kitab al-mukhasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala* (Résumé des calculs possibles par transposition et réduction). On lui doit aussi le terme « algorithme », dérivé de son nom. Al-Khwârizmi a expliqué comment n'importe quel problème peut être réduit à une formulation parmi six standardisées, au moyen de deux protocoles, le premier appelé *al-jabr* et le second *al-muqabala*.

L'*al-jabr* traitait des termes de transformation pour éliminer des quantités négatives de sorte, par exemple, que $x = 40 - 4x$ devienne $5x = 40$ et donc $x = 8$.

La procédure suivante, *al-muqabala*, avait pour but d'équilibrer les quantités positives restantes (ainsi, si nous posons $50 + x^2 = 29 + 10x$). L'al-maqabala réduit cette expression à $x^2 + 21 = 10x$.


كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة
ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي
بسم الله الرحمن الرحيم
هذا كتاب وضعه محمد بن موسى

Dans son livre, Al-Khwârizmi n'utilisait pas de symboles comme nous le ferions aujourd'hui – les symboles ont été introduits plus tard. Avec ses « mots », il exprimait les solutions à des équations quadratiques et a posé la formule standard :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

qui a pour solution :

$$x = [1/2\ a]\ [-b \pm \sqrt{}\ (b^2 - 4ac)].$$

Nous avons déjà vu cela page 45.

Le développpement de l'algèbre



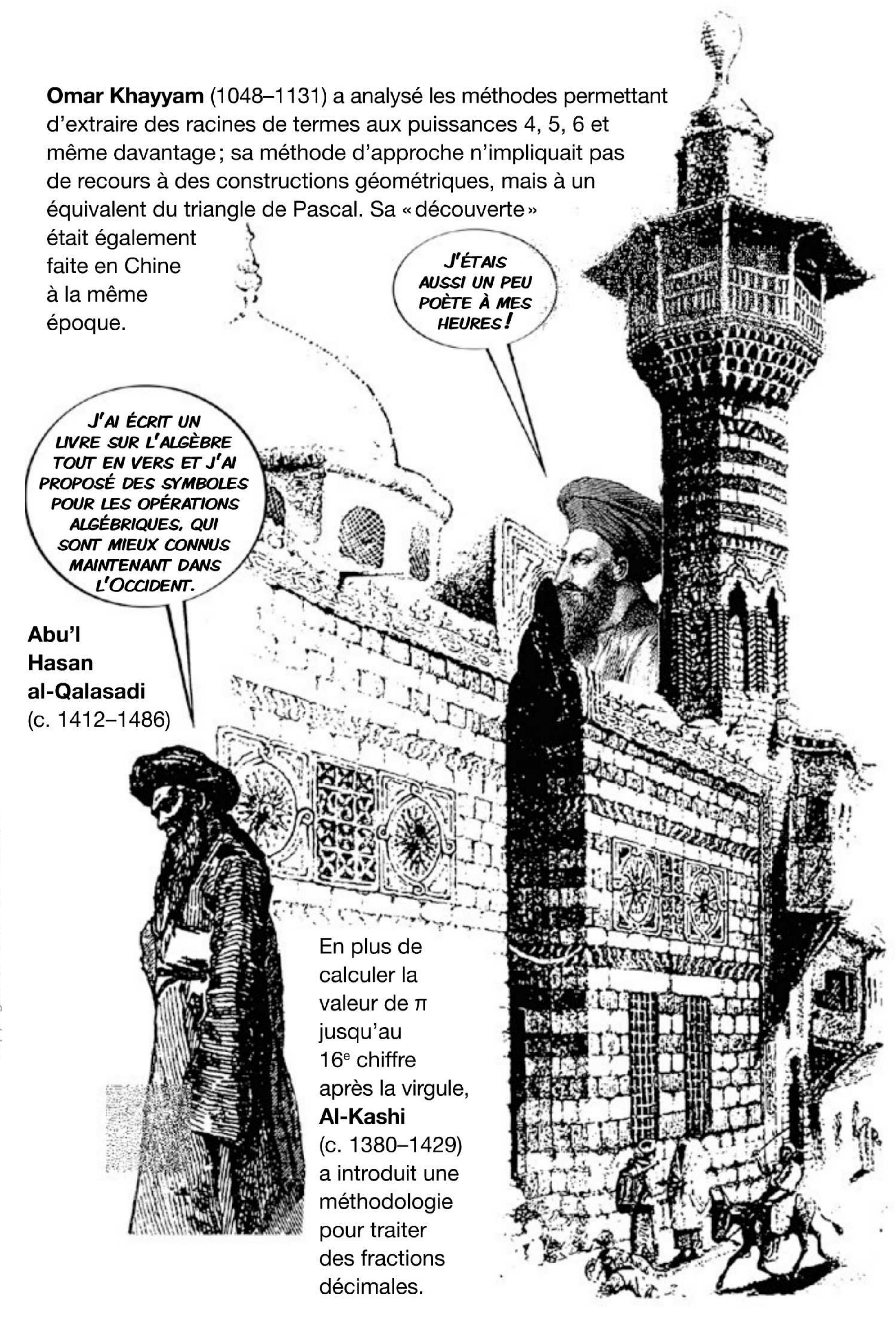
«Pour nous, le but de l'algèbre est double : l'application systématique des opérations de l'arithmétique élémentaire aux expressions algébriques ; et l'étude d'expressions algébriques, indépendamment de ce qu'elles pouvaient représenter, de façon à pouvoir leur appliquer les opérations d'ordre général qui avaient déjà été appliquées aux nombres.»

Al-Samaw'al
(environ 1130–1180)

Al-Samaw'al a été le premier à écrire ses résultats algébriques sous forme de symboles.


Dans mon livre al-Fakhri, j'ai étudié les différentes «puissances de l'inconnue».
J'ai également appliqué des protocoles arithmétiques à des expressions algébriques et j'ai avancé l'une des premières formulations pour l'algèbre des «polynômes».
Al-Karaji
(c. 953–1029)
Les travaux d'Al-Karaji ont été utilisés par ses successeurs pour proposer des règles pour la «divisibilité» des polynômes, l'un par l'autre et aussi des règles relatives à la possibilité ou non d'extraire la racine carrée d'un polynôme.
Ces travaux ont mené à «l'analyse combinatoire», appliquée par la suite aux analyses des jeux du hasard pour calculer les probabilités de l'ordre des jets de dés ou de mains de cartes.
Une formule pour une «expansion binomiale» était également énoncée et dérivée de ces travaux.
Sa table de coefficients, c'est-à-dire le «triangle de Pascal» (déjà découvert par les Chinois, comme indiqué plus haut), était mise en évidence.

Omar Khayyam (1048–1131) a analysé les méthodes permettant d’extraire des racines de termes aux puissances 4, 5, 6 et même davantage ; sa méthode d’approche n’impliquait pas de recours à des constructions géométriques, mais à un équivalent du triangle de Pascal. Sa « découverte » était également faite en Chine à la même époque.



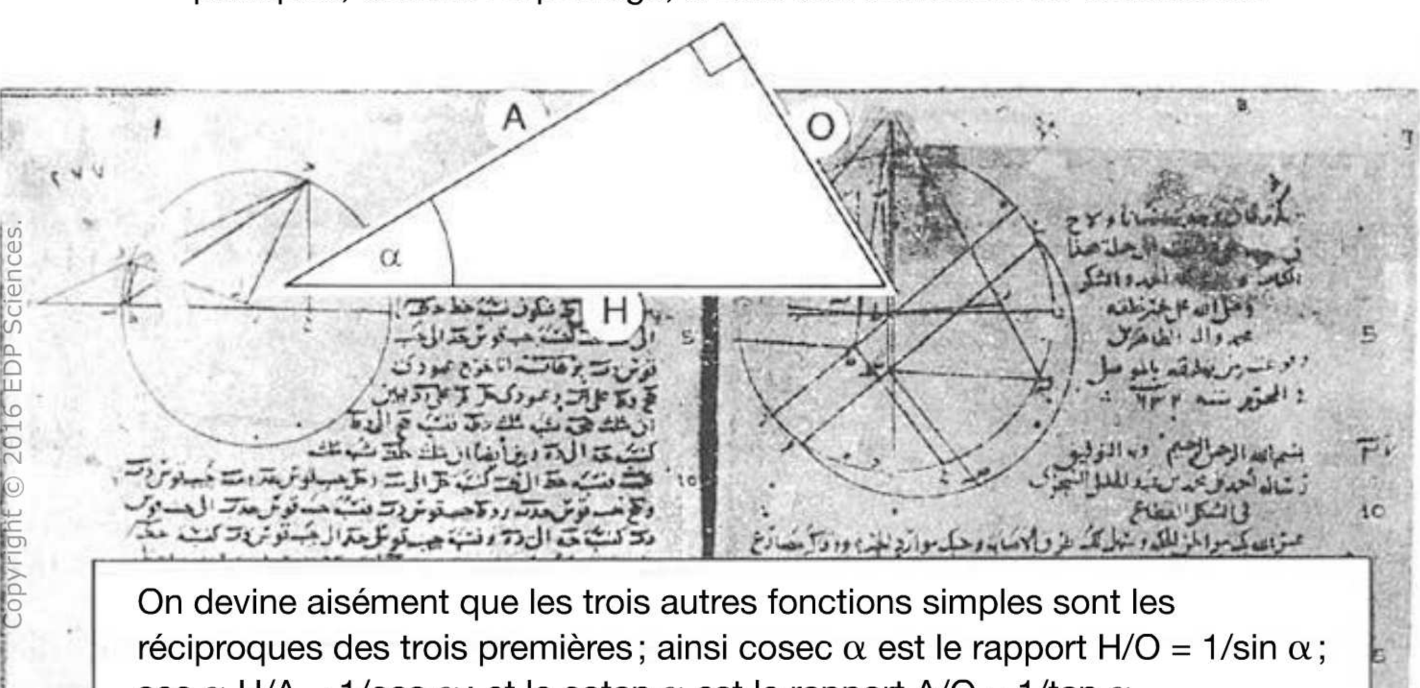
Abu’l Hasan al-Qalasadi (c. 1412–1486)

En plus de calculer la valeur de π jusqu’au 16e chiffre après la virgule, **Al-Kashi** (c. 1380–1429) a introduit une méthodologie pour traiter des fractions décimales.

La découverte de la trigonométrie

Ce sont des mathématiciens qui ont introduit les six rapports trigonométriques de base et leur développement pour apporter des solutions à divers problèmes géométriques. Ils ont ainsi remplacé la méthode « lourde » dite des cordes (segments inscrits dans un cercle) des Grecs – notamment l'astronome **Claude Ptolémée** (c. 100–170) – par une approche trigonométrique moderne.

On définit ces six fonctions par rapport aux côtés d'un triangle rectangle : **O** pour la droite opposée à un angle donné α, **A** pour une droite adjacente à cet angle et **H** pour l'hypoténuse, c'est-à-dire la droite la plus longue du triangle. Alors, le **sinus** de l'angle est donné par le rapport **O/H**, le **cosinus** par **A/H** et la **tangente** par **O/A**. Un monde incroyable de rapports découle de ces trois définitions basiques. La trigonométrie représentait l'un des développements les plus importants dans la progression de nos mathématiques, mais aussi pour l'astronomie et les arts de mesure pratiques, comme l'arpentage, si utile aux bâtisseurs de forteresses.



On devine aisément que les trois autres fonctions simples sont les réciproques des trois premières ; ainsi cosec α est le rapport H/O = 1/sin α ; sec α H/A = 1/cos α ; et le cotan α est le rapport A/O = 1/tan α.

Al-Battani

Al-Battani (c. 855–923) a produit un nombre conséquent de rapports trigonométriques, parmi lesquels :

tan a = sin a / cos a

sec a = $\sqrt{1+\tan^2 a}$

Il a également résolu l'équation sin x = a cos x

en découvrant la formule

sin x = a / $\sqrt{1+a^2}$

J'AI ÉGALEMENT FAIT BON USAGE DE LA TANGENTE OU «L'OMBRE», INTRODUITE PRÉCÉDEMMENT PAR LE PIONNIER **AL-MARWAZI** (C. 796–869), POUR DÉVELOPPER DES ÉQUATIONS DE CALCUL DES VALEURS DE TANGENTES ET DE COTANGENTES POUR LESQUELLES, EN PARTICULIER, J'AI RÉDIGÉ UNE TABLE DE VALEURS.

Abu Wafa

Abu Wafa (940–998) a établi les rapports suivants :

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

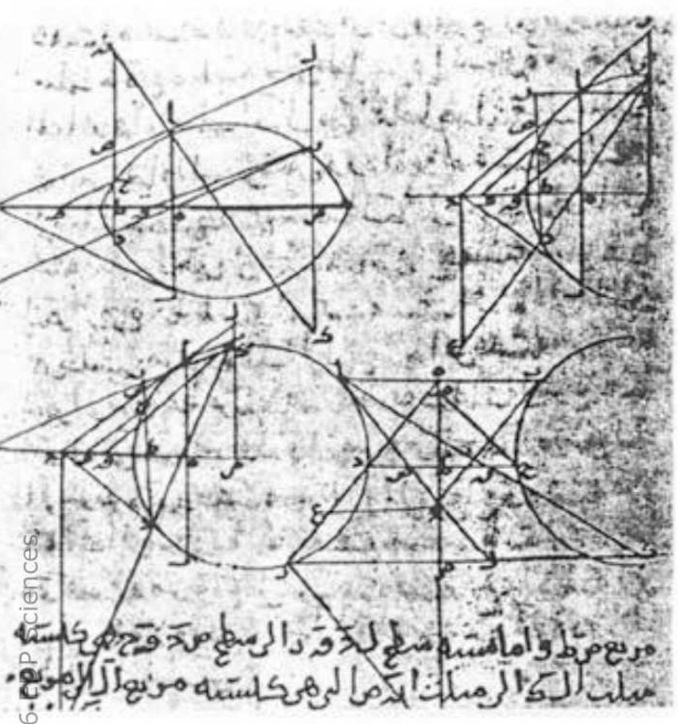
$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

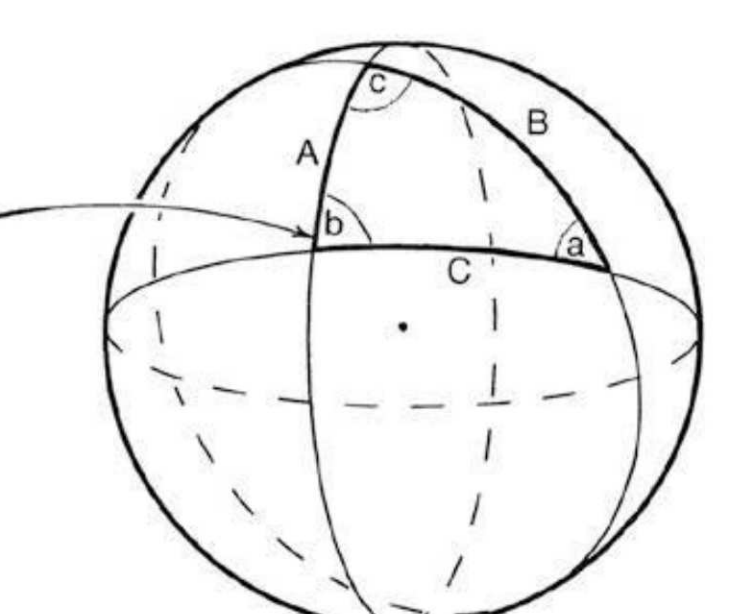
et il a découvert les formules en sinus pour les calculs en géométrie sphérique :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$





A, B et C sont les longueurs (en degrés) des « grands cercles » qui constituent un triangle à la surface d'une sphère, avec a, b et c les angles opposés. On rappelle qu'un grand cercle entoure un plan qui passe par le centre de la sphère. De nos jours, les avions long-courriers suivent de tels cercles orthodromiques, qui offrent donc le trajet le plus court entre deux points sur le globe.



Ibn Yunus et Thabit Ibn Qurra

Ibn Yunus (950–1009) a démontré que :

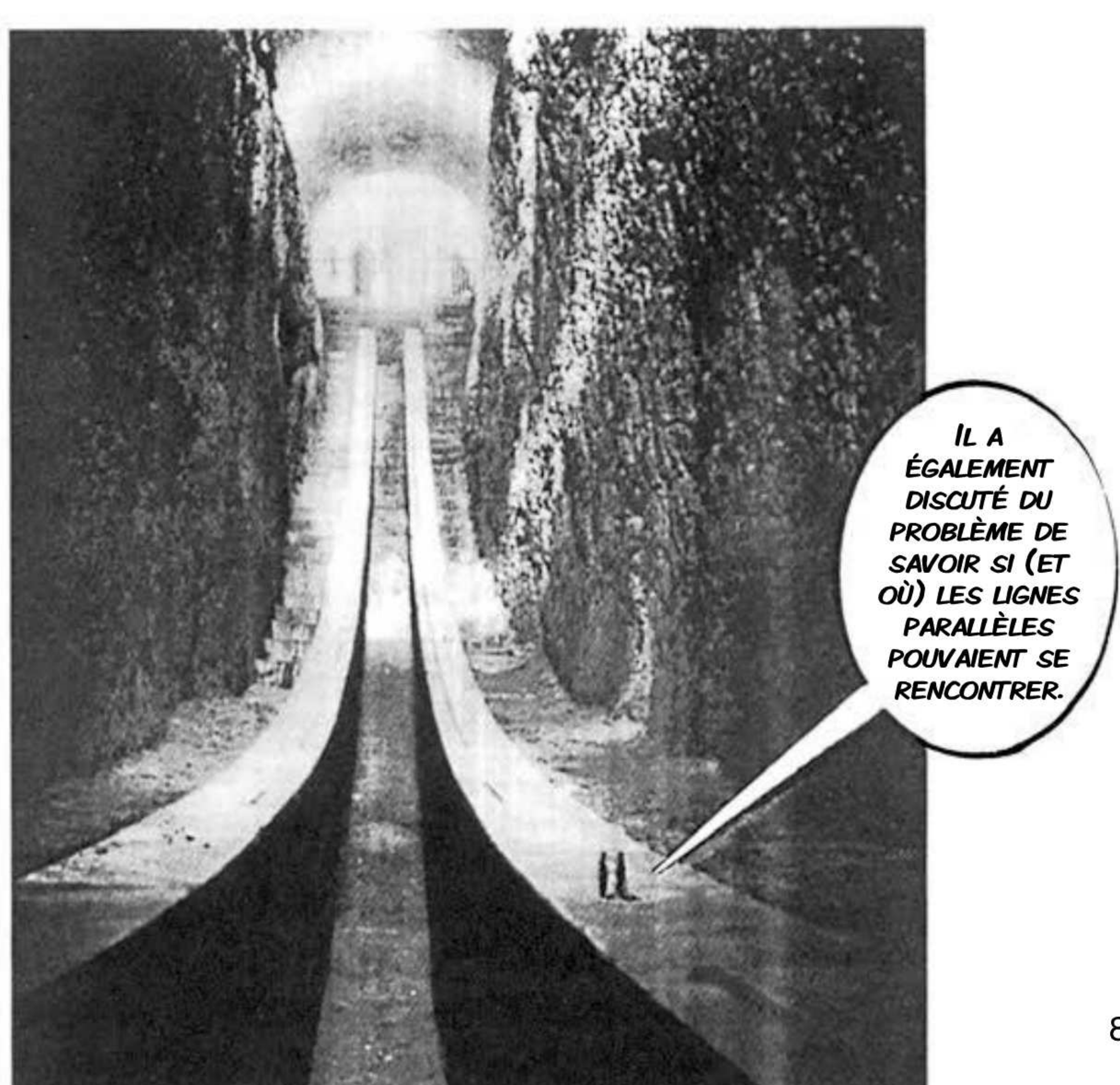
$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$

Bien que cette équation fasse référence à des fonctions trigonométriques, elle permet de décliner un produit comme une somme. Au temps où les calculs de produits et de nombres avec de nombreux chiffres étaient sûrement fastidieux, cette formule simplifiait énormément le travail. Elle a d'ailleurs servi plus tard à renforcer le développement des logarithmes, qui exécutent la même fonction mais plus directement. Elle a débouché aussi sur la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, toujours en vigueur aujourd'hui, la formule cosinus suivante :

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(où A est l'arc d'un grand cercle, a étant l'angle opposé).

Thabit ibn Qurra (836–901) a rédigé des textes sur la théorie des nombres et a étendu leur utilisation au traitement des rapports entre quantités géométriques – un pas que n'ont jamais franchi les Grecs.





At-tusi

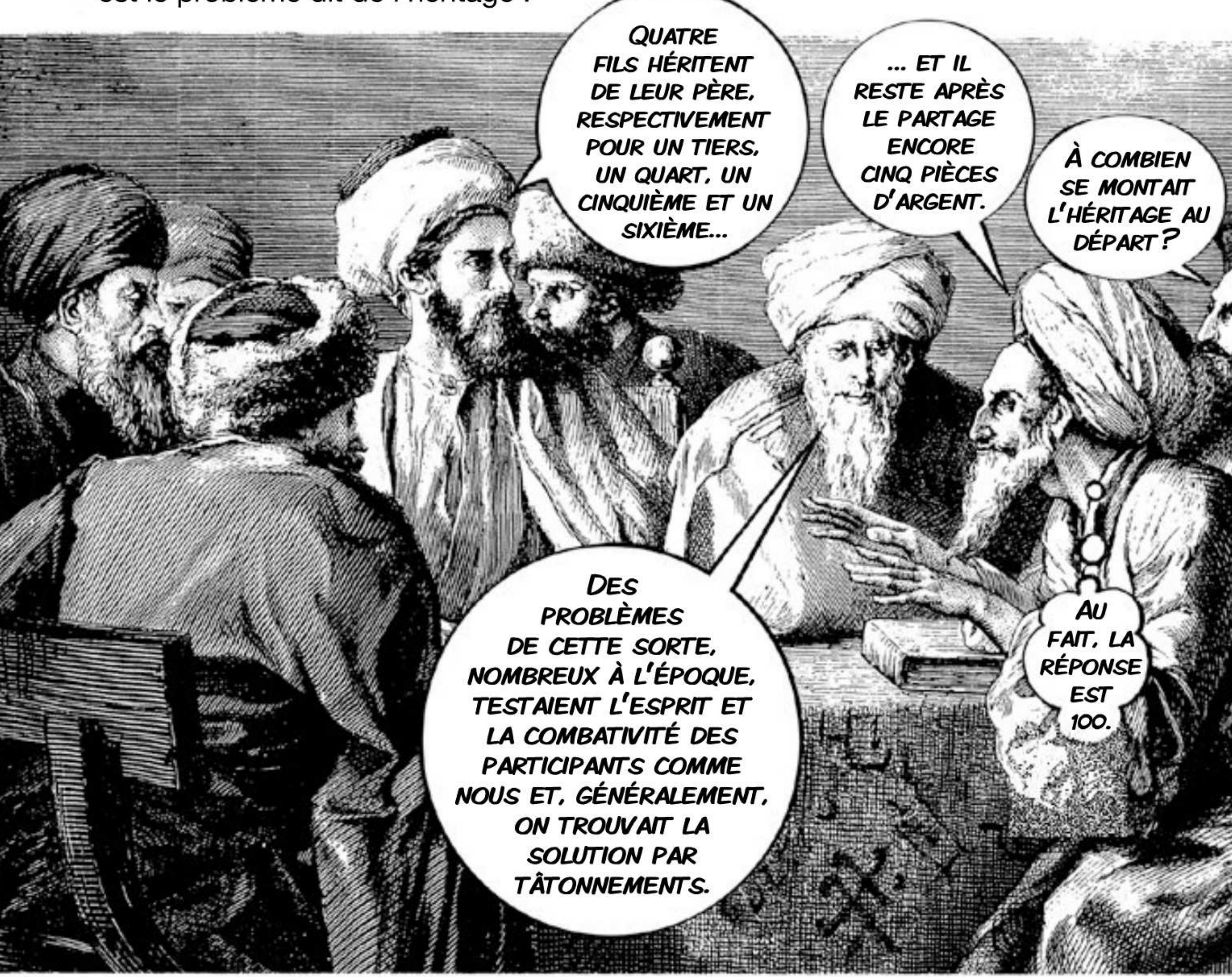
Le plus éminent des universitaires dans le champ de la trigonométrie, plane et sphérique, était **Nasir ad-Din at-Tusi** (1201–1274).

Son traitement global de la résolution des triangles sphériques est une étude qui fait date dans le développement des mathématiques. Il a élaboré une formule connue comme le « couple Tusi » qui démontrait comment un mouvement de va-et-vient peut être représenté par la combinaison de deux mouvements circulaires.

Ce dispositif a permis à **Nicolas Copernic** (1473–1543) de représenter tous les déplacements irréguliers de planètes comme des mouvements circulaires combinés, et c'est ce qui lui a permis d'imaginer un système astronomique avec le Soleil (et non la Terre) en son centre (système héliocentrique).

Solutions de problèmes impliquant des nombres entiers

Pendant plusieurs siècles, les problèmes faisant appel à des entiers étaient très populaires. Après tout, les gens comprennent bien les nombres. Un exemple est le problème dit de l'héritage :



Une approche plus rigoureuse était démontrée pour la première fois par **Diophante d'Alexandrie** (c. IIIe siècle). Les mathématiciens musulmans étaient actifs dans le développement théorique de ce travail. Un point de départ naturel était constitué des « nombres pythagoriciens » (comme 3, 4 et 5) qui forment des triangles rectangles. Puis l'équation a été généralisée et au Xe siècle, les mathématiciens musulmans ont posé la question : l'équation $x^n + y^n = z^n$ peut-elle avoir une solution en nombres entiers ? Tout comme Fermat plusieurs siècles après (son nom a été donné à ce problème), plusieurs mathématiciens pensaient avoir la preuve de son impossibilité. Leurs successeurs ont découvert leur erreur et nous savons qu'il s'agit d'une démonstration des plus difficiles !

L'émergence des mathématiques Européennes

Les mathématiques en Europe ont profité des contributions de toutes les civilisations antérieures et contemporaines. Pendant toute la période du Moyen Âge, l'Europe était significativement inférieure aux civilisations de l'Orient, en termes de technologies, de sciences et de culture. Elle a rattrapé petit à petit son retard, d'abord au travers de contacts culturels au moment des croisades, puis par des dialogues avec des savants d'Espagne et d'Italie.

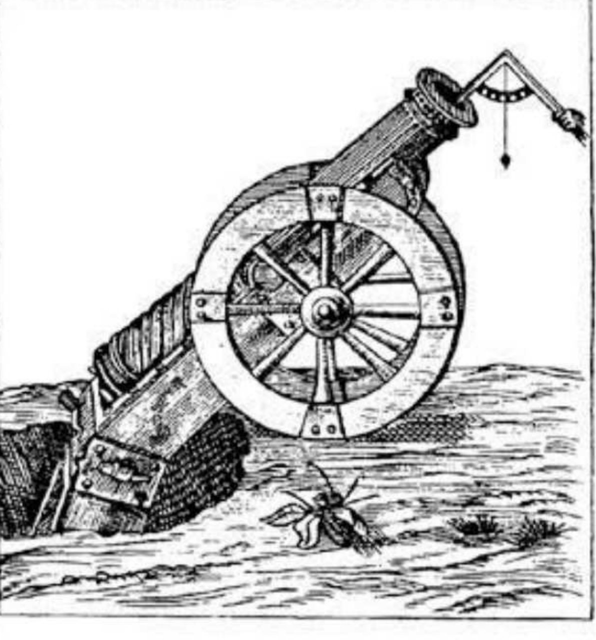
Les textes en langue arabe (soit les originaux soit déjà des traductions en grec) pouvaient être traduits par des équipes de linguistes, parfois avec des Juifs comme intermédiaires.



Les termes scientifiques qui ont le préfixe « al » comme alcool ou algèbre nous rappellent ces liens culturels. Pendant la Renaissance au XVe siècle, on a redécouvert la tradition des mathématiques, esthétiques, mystiques et ésotériques.

PUIS AU XVIe SIÈCLE, LES MATHÉMATIQUES EUROPÉENNES ONT « DÉCOLLÉ ».

LES EXPLORATIONS, LES CONQUÊTES ET LES GUERRES DE RELIGION ÉTAIENT LES GRANDES THÉMATIQUES DE CETTE ÉPOQUE.



On avait besoin de mathématiques pour naviguer au long cours et on s'en servait pour des constructions de défense (forts et fortifications) et pour mener des attaques (artillerie et abaques de tir). Des disciplines comme la trigonométrie étaient vitales pour s'assurer un plein succès dans pareils cas de figure. La pratique permettait d'améliorer les abaques de tir, mais augmentait aussi le niveau de connaissances théoriques.

Il y avait en parallèle, pour ainsi dire, un développement constant du commerce, ce qui demandait des méthodes améliorées pour tenir les comptes. Plus tôt, l'Église avait condamné les chiffres arabes et la comptabilité à double entrée, qui semblait plus relever d'un art magique pour ne pas dire de passe-passe (parfois c'était bien le cas !). Mais à présent, cette comptabilité-là est trop répandue pour être ignorée.

Des progrès dans les mathématiques théoriques en Europe s'accompagnaient de crises et de paradoxes. Les nombres négatifs ou irrationnels qui ne gênaient pas beaucoup les Chinois, les Indiens ou les mathématiciens arabes, sont devenus extrêmement problématiques pour les Européens, même quand ils s'en servaient avec dextérité et succès. À la fin, les paradoxes ont donné naissance à de nouveaux champs des mathématiques…



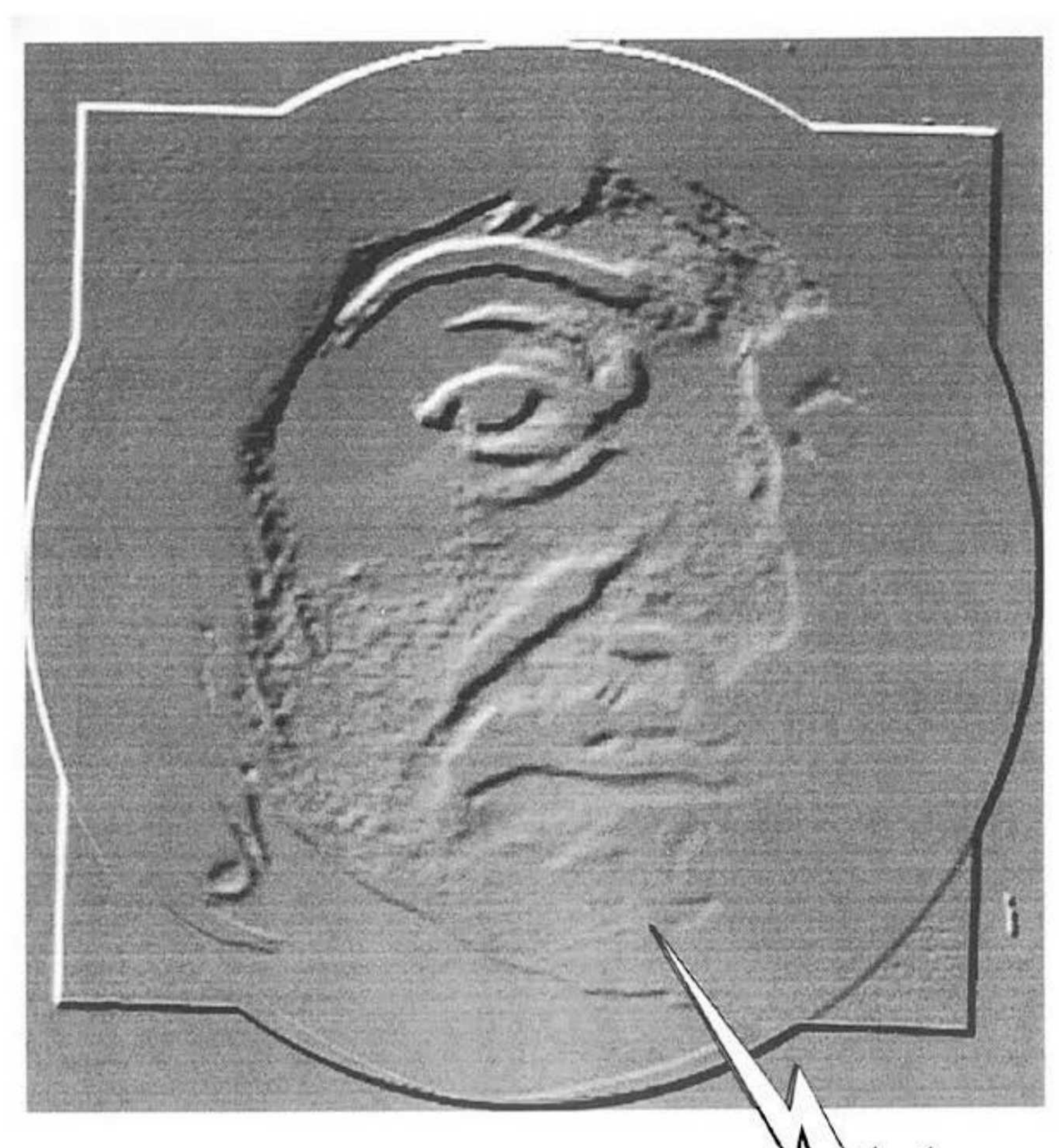
René Descartes

Il est notable que le plus grand « innovateur » européen en mathématiques, le Français **René Descartes** (1596–1650), était aussi philosophe. Dans sa quête de certitude, il s'est détourné de son apprentissage du fonds littéraire humaniste pour se consacrer aux mathématiques. Mais au commencement, ce fut pour lui une déception.



Pourquoi Descartes se réfère-t-il à l'algèbre en termes aussi mesquins alors qu'il s'apprêtait à l'améliorer ? Une raison en est que l'algèbre n'a été que partiellement formalisée au XVI[e] siècle. Quelques-uns de ses termes avaient reçu des dénominations abrégées, qui n'étaient ni des expressions claires ni des symboles manipulables. Mais pour les mathématiciens de son époque, en réalité, il y avait des difficultés plus grandes encore. Ils se trouvaient en train de décrire des objets dénués de sens, ou pire !

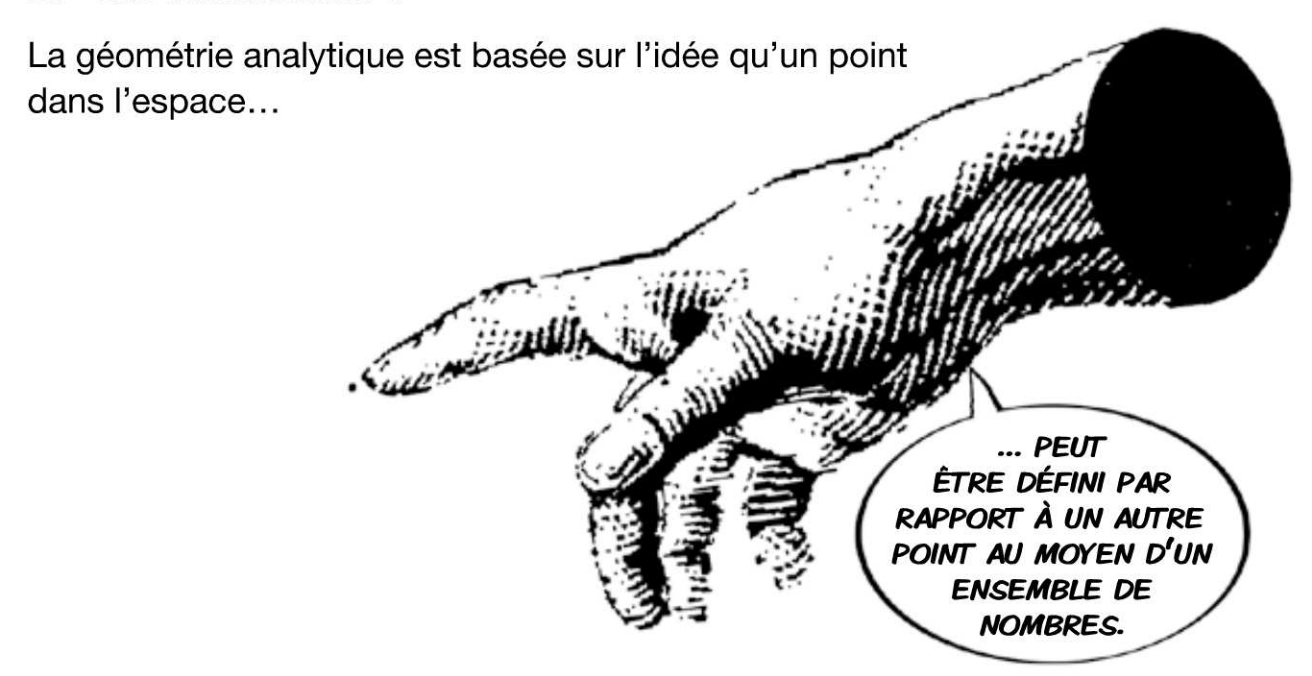
Nous avons déjà mentionné les « nombres imaginaires », les racines d'équations algébriques comme $x^2 + 1 = 0$. Mais de quelle sorte de nombre peut-il s'agir ? Nous ne pouvons pas nous en servir pour énumérer des objets. Quelles sont ces catégories d'objets physiques dont la valeur de leur mesure, au carré, est négative ? On a beau pouvoir les « manipuler » avec des règles, il n'empêche que, même en prenant des précautions, on peut finir par écrire des absurdités.



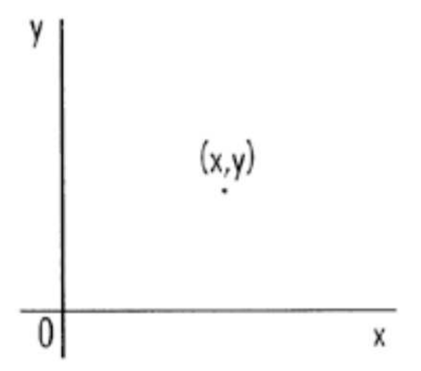
La géométrie analytique

Les efforts de Descartes ont débouché sur la géométrie « analytique » ou « des coordonnées ».

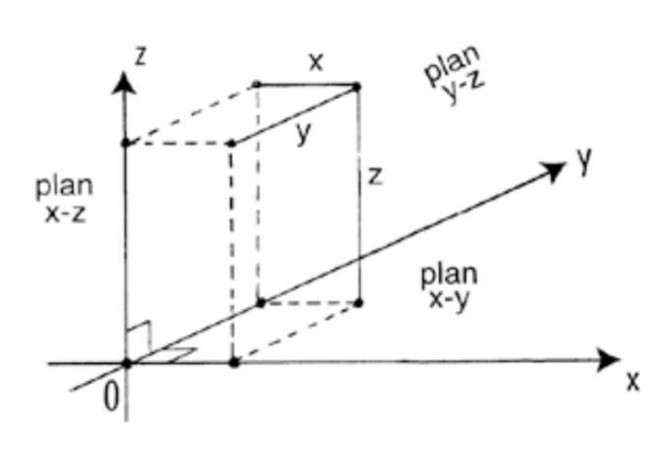
La géométrie analytique est basée sur l'idée qu'un point dans l'espace…



Dans la géométrie plane, il y a deux axes à angle droit l'un par rapport à l'autre que nous appelons communément l'axe x (abscisses) et l'axe y (ordonnées). La position d'un point quelconque dans le plan est donnée par les coordonnées (x, y) qui indiquent la distance, dans le sens x et dans le sens y, à partir de l'origine – c'est-à-dire du point de l'intersection des deux axes.



Dans une figure à trois dimensions, nous plaçons trois axes chacun à angle droit par rapport aux deux autres : les axes x, y et z (abscisse, ordonnée et cote).







La forme la plus simple de graphique est la droite, ce qui équivaut à une équation linéaire de type y = ax + b où a et b sont des constantes.

L'équation $y = x^2$ décrit une **parabole**…

... QUI MONTE, QUI MONTE...

… et l'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ décrit **l'ellipse**, sorte de cercle déformé.

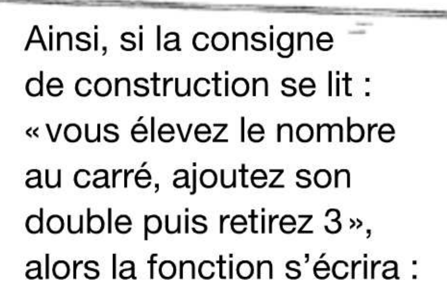
DANS LE TEMPS, JE TROUVAIS CES GRAPHIQUES ENNUYEUX, MAIS MAINTENANT JE LES TROUVE ASSEZ JOLIS.



… est **l'hyperbole**, qui a pour formule : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. C'est le signe moins qui fait toute la différence, puisque le graphique a deux branches qui s'éloignent vers l'infini.

Les fonctions

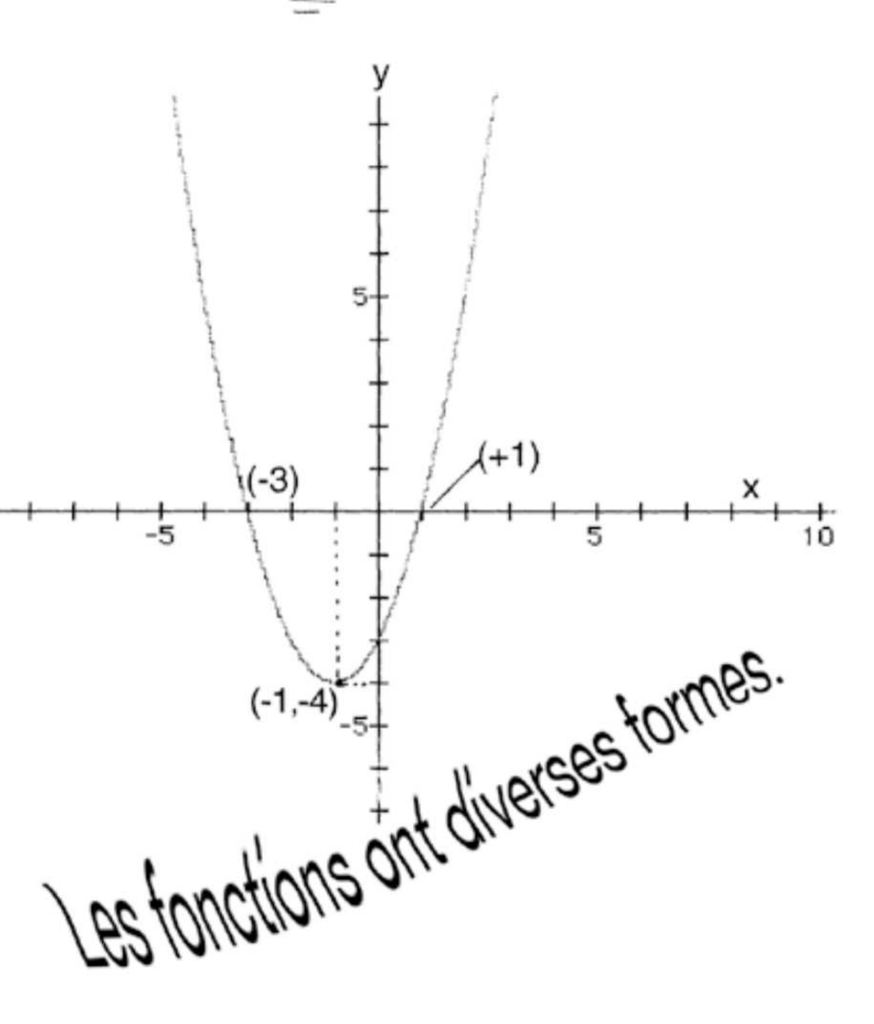
Le terme «**fonction**» désigne un rapport ou une dépendance d'un terme variable par rapport à un autre (ou d'autres). Nous disons, par exemple, que y est une fonction de x, ou que z est une fonction de x et de y. (Suivant les préconisations de Descartes, nous employons les lettres vers la fin de l'alphabet pour les variables et celles du début, comme a, b, c, pour les constantes.)

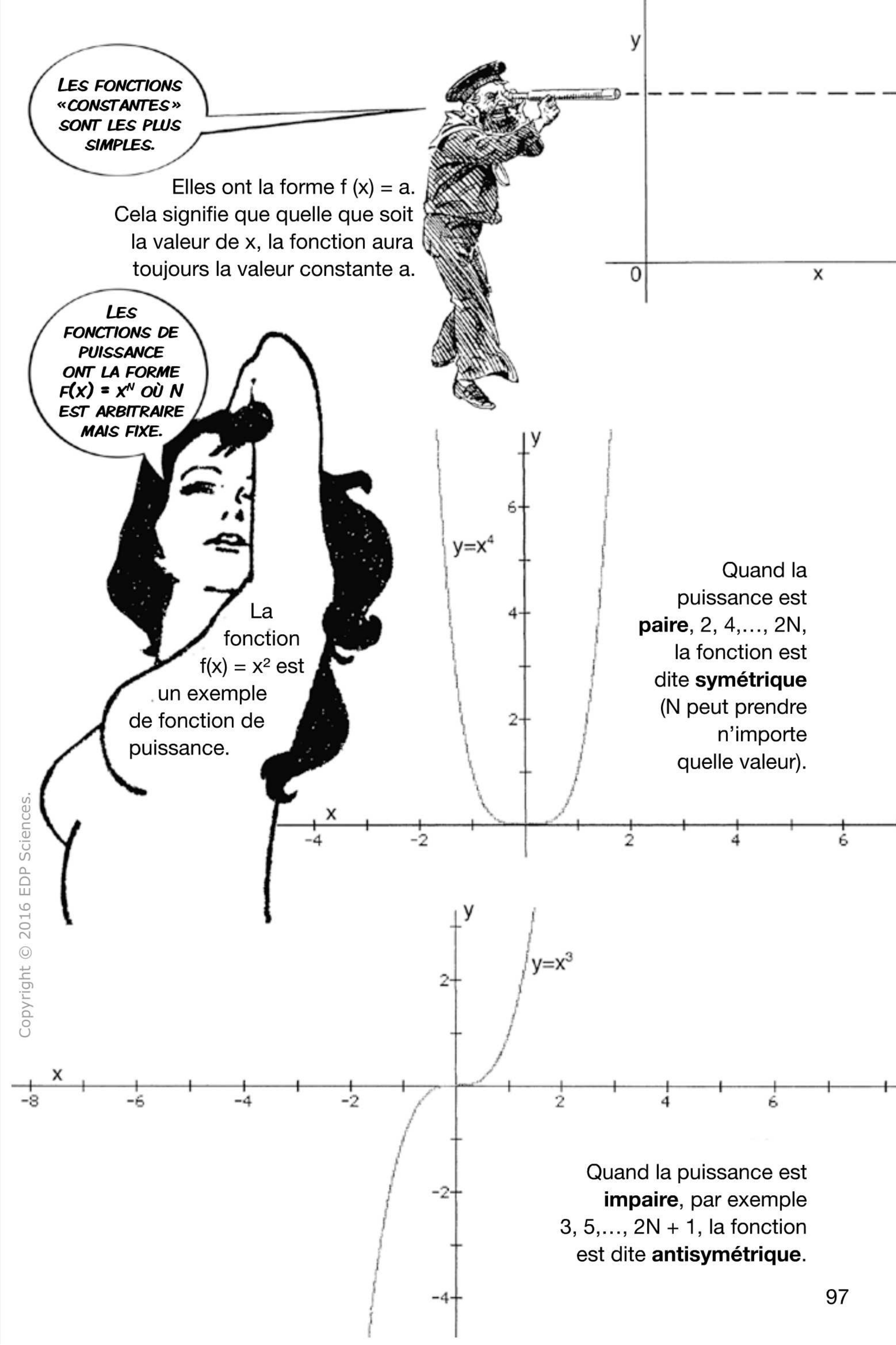


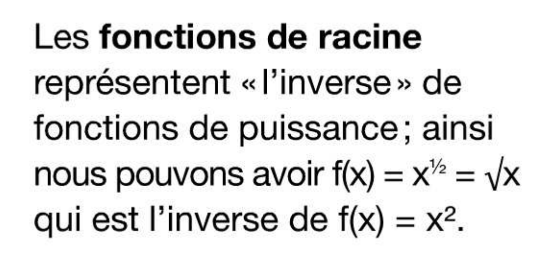
Ainsi, si la consigne de construction se lit : «vous élevez le nombre au carré, ajoutez son double puis retirez 3», alors la fonction s'écrira :

$f(x) = x^2 + 2x - 3$.

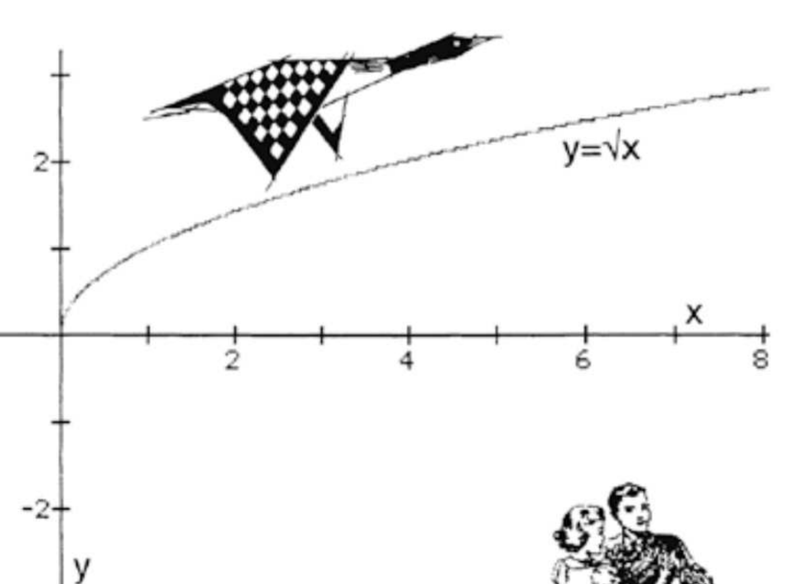
Dans une géométrie analytique, une telle fonction (avec une seule variable) peut être schématisée en inscrivant les valeurs de x le long d'un axe et les valeurs de la fonction de x le long de l'autre axe. En l'occurrence, la fonction représente une parabole qui intercepte l'axe x aux points x = –3 et x = +1 et le point le plus bas se trouve à x = –1 et y = –4.




Les fonctions «constantes» sont les plus simples.
Elles ont la forme f (x) = a. Cela signifie que quelle que soit la valeur de x, la fonction aura toujours la valeur constante a.
y
0
x
Les fonctions de puissance ont la forme f(x) = x^N où N est arbitraire mais fixe.
La fonction f(x) = x² est un exemple de fonction de puissance.
y=x⁴
Quand la puissance est **paire**, 2, 4,…, 2N, la fonction est dite **symétrique** (N peut prendre n'importe quelle valeur).
y=x³
Quand la puissance est **impaire**, par exemple 3, 5,…, 2N + 1, la fonction est dite **antisymétrique**.



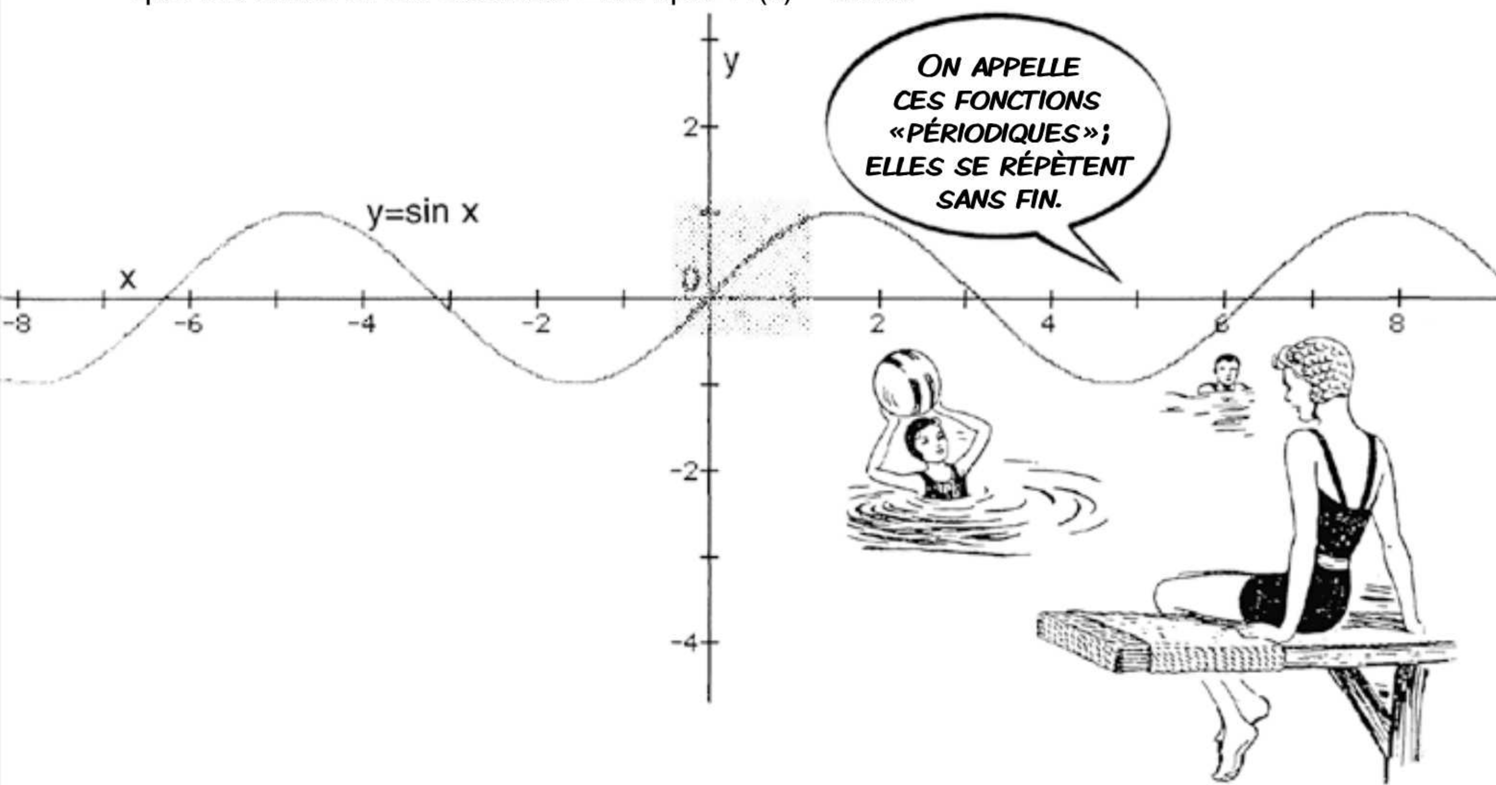
Les **fonctions de racine** représentent « l'inverse » de fonctions de puissance ; ainsi nous pouvons avoir $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ qui est l'inverse de $f(x) = x^2$.



Les **fonctions polynomiales** ont des constantes a, b, c, d, etc., et une variable x qui peut être élevée à diverses puissances. Une fonction polynomiale a la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Les **fonctions trigonométriques** utilisent des rapports trigonométriques, tels que les sinus et les cosinus. Exemple : $f(x) = \sin x$.



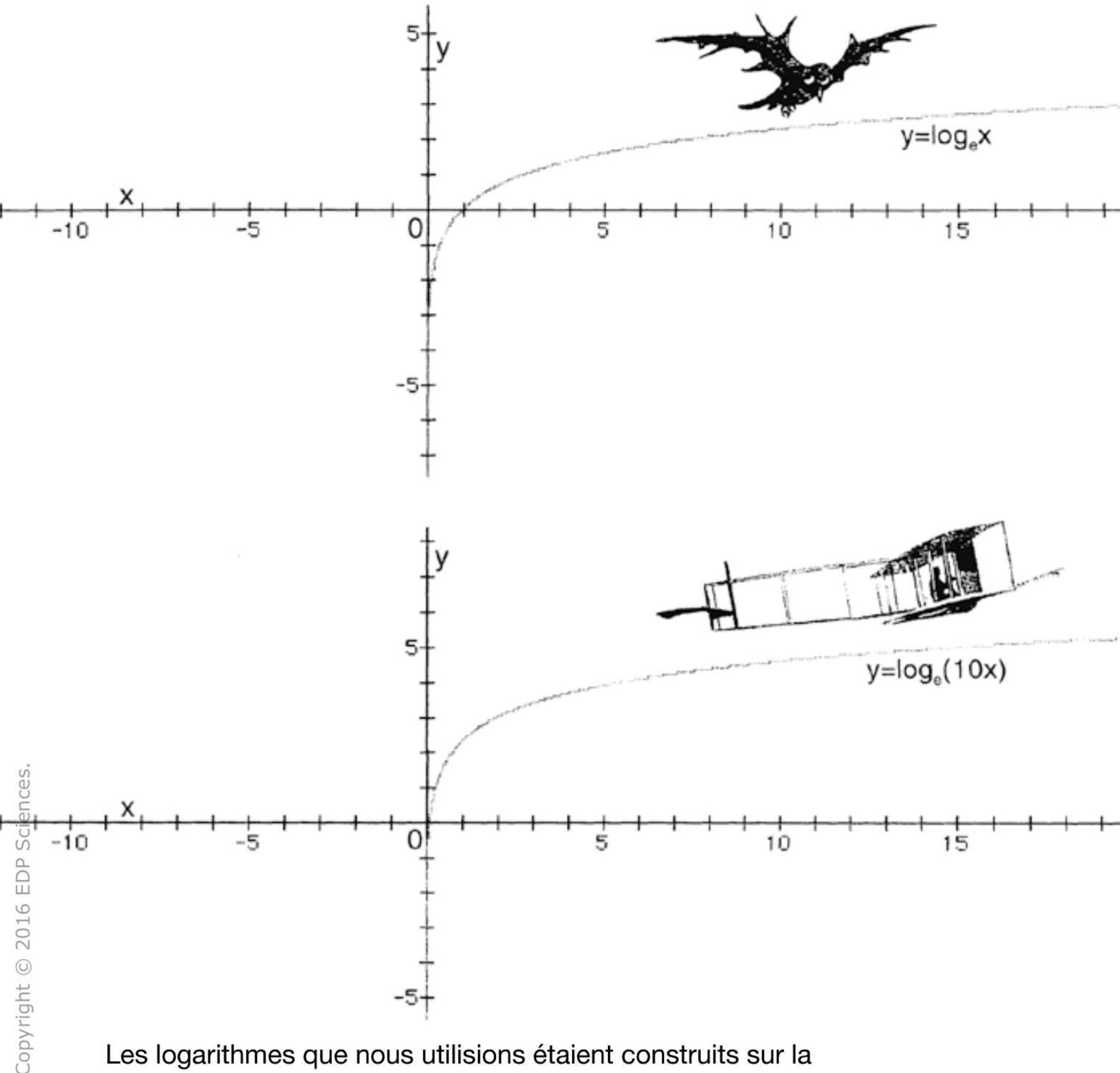
Les **fonctions exponentielles**, telles que $f(x) = a^x$, diffèrent des fonctions de puissance en ce sens que le nombre fixe devient la base et la variable devient la puissance. Les fonctions exponentielles où la base est supérieure à 1 croissent avec une rapidité phénoménale.

$y=e^x$

$y=e^x$

L'échelle est réduite ici pour mettre en évidence la croissance rapide.

Les **fonctions logarithmiques** sont les inverses des fonctions exponentielles. On écrit $f(x) = \log_a(x)$; le nombre a est la **base** du logarithme. Ces fonctions croissent très lentement, par exemple : $\log_a(10x) = \log_a(x) + \log_a(10)$



Les logarithmes que nous utilisions étaient construits sur la base 10. Dans nos ordinateurs, on passe par l'arithmétique binaire (0 et 1), avec la base 2. Cependant, pour mener à bien des exercices en mathématiques théoriques, rien ne vaut la base e = 2,718 28…

C'est la « mère de toutes les bases » et elle représente la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, où la vitesse de croissance est exactement égale à la taille atteinte.



Le calcul différentiel/ intégral

Les travaux de Descartes ont parachevé le processus de libération de l'algèbre des mots, un peu comme la géométrie des Grecs a libéré les constructions des nombres. Une fois que Descartes eut fourni le formalisme nécessaire pour écrire des relations algébriques, les progrès ont été rapides. En moins de 40 ans après la publication de l'ouvrage de Descartes sur la géométrie algébrique, le mathématicien et philosophe allemand **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646–1716) a créé une « algèbre de l'infini ». Ce que le monde anglo-saxon appelle « calculus » (en France calcul différentiel/ intégral) s'est révélé être un puissant outil pour analyser des phénomènes de croissance et/ou de changement.







La fonction : $f(x)$

La courbe $y = f(x)$

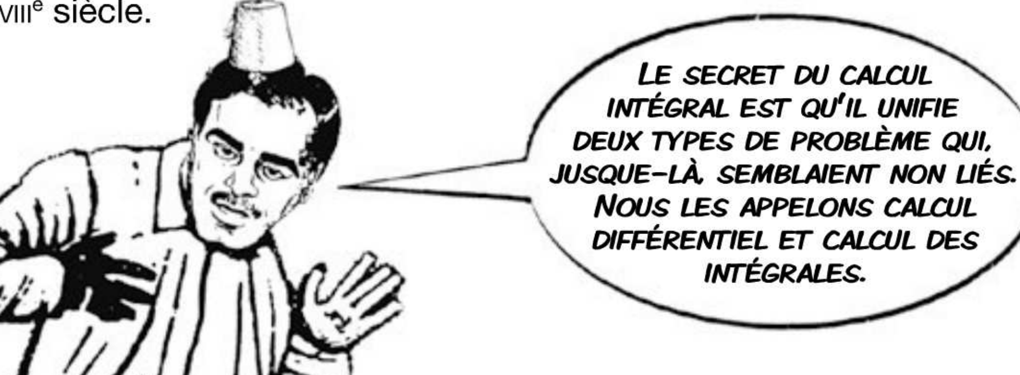
La pente de la tangente : la dérivée $f'(x) = dy/dx$.

L'aire sous la courbe, entre les ponts a et b, est l'intégrale

$$\int_2^b f(x)dx$$

Leibniz

Sir Isaac Newton (1642–1727) avait fait une découverte équivalente un peu plus tôt, mais il avait simplement étendu la notation de Descartes plutôt que de la dépasser. C'est donc la forme leibnizienne du calcul qui prédomine aujourd'hui. Ainsi, nous voyons que deux philosophes, Descartes et Leibniz, ont créé les notations et les idées qui ont façonné les mathématiques depuis le début du XVIIIe siècle.



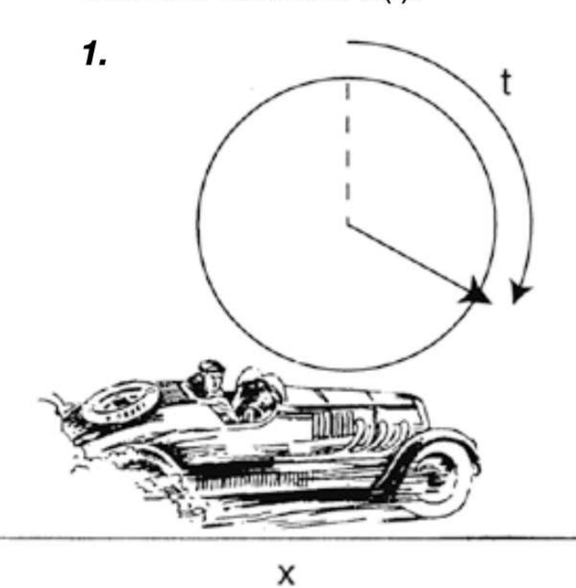
Le calcul différentiel



Le processus qui permet de déterminer à quel taux une quantité varie s'appelle la **différentiation**. Quand nous calculons la dérivée d'une fonction, nous obtenons une valeur qui indique son *taux de changement*.

Prenons le cas d'un véhicule qui se déplace sur une route. Sa position change constamment. À l'instant t, sa position x est représentée par une fonction continue x(t).

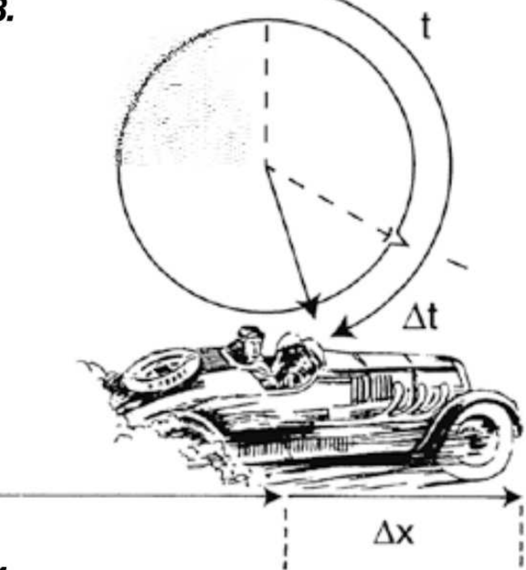
1.



2.

Le véhicule continue d'avancer et après un incrément de t, symbolisé par Δt, il aura atteint sa nouvelle position $x + \Delta x$.

3.



4.

Le véhicule atteint sa nouvelle position à un instant différent, qui est donné par la somme t (le temps original) + Δt.

Quelle est la vitesse moyenne du véhicule sur ce parcours ? On l'obtient en divisant la distance parcourue par le temps écoulé (Δt) entre l'origine et la nouvelle position. Autrement dit :

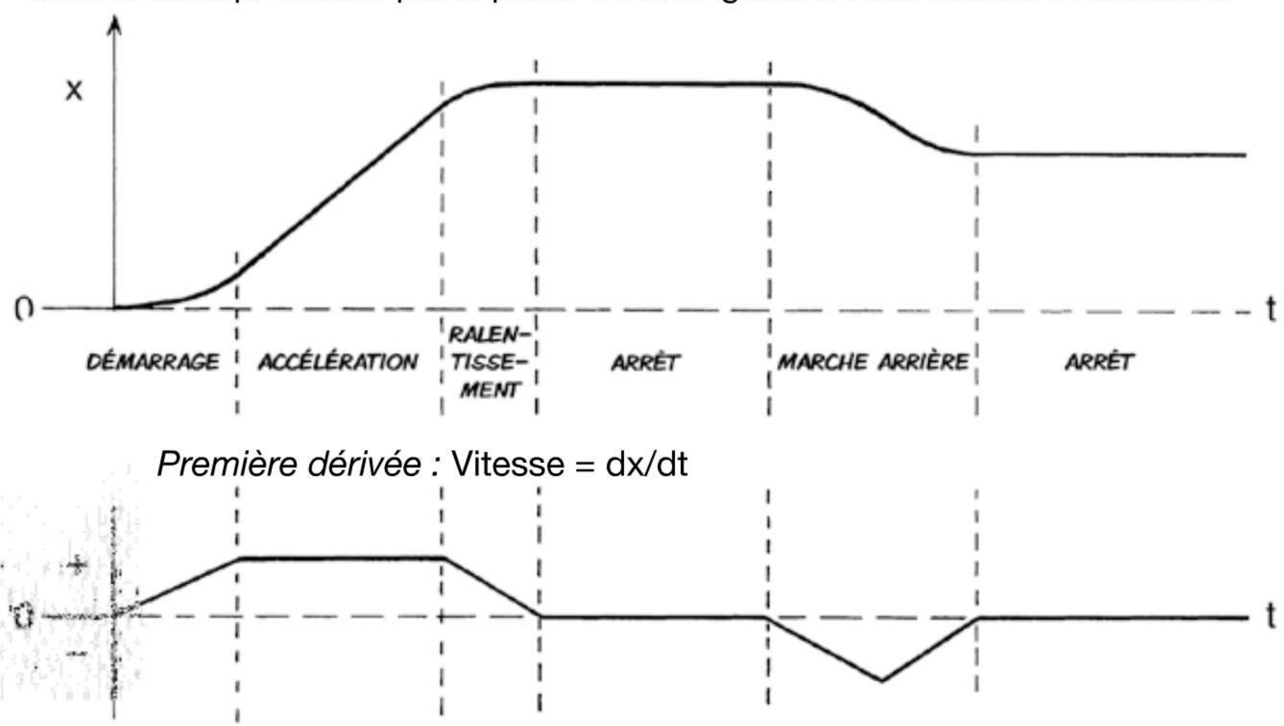
$$\Delta x / \Delta t = f(t + \Delta t) - f(t) / \Delta t.$$

Par conséquent, supposons que nous voulons définir la vitesse d'un corps en mouvement – qui peut être un véhicule – à l'instant t ou le taux de changement de x à cet instant t. Nous pouvons essayer de réduire l'incrément Δt autant que possible, Δt devenant si petit qu'il s'approche de zéro. Nous disons à présent que la **limite** de la vitesse moyenne Δx/Δt, avec une valeur de Δt qui s'approche de zéro, est sa vitesse instantanée. On écrira dx/dt et on l'appellera la **dérivée** de x.





Si, en parallèle, nous traçons le graphique de x en fonction du temps, la dérivée est représentée par la pente de la tangente à cette courbe à l'instant t.



Première dérivée : Vitesse = dx/dt

\+
0
–
t

Nous pouvons aussi prendre la dérivée de la première dérivée, donc la seconde dérivée, ce qui – dans le cas de notre véhicule sur la route – indique le taux de changement de la vitesse, c'est-à-dire son accélération.

Seconde dérivée : Accélération = d^2x/dt^2

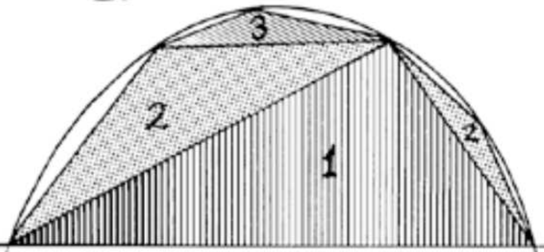
\+
0
–
t

WAOUH ! C'ÉTAIT UN PEU COMPLIQUÉ, NON ?

TU N'AS RIEN VU, VOICI À PRÉSENT UN AUTRE BOUT D'ANALYSE.

Intégration



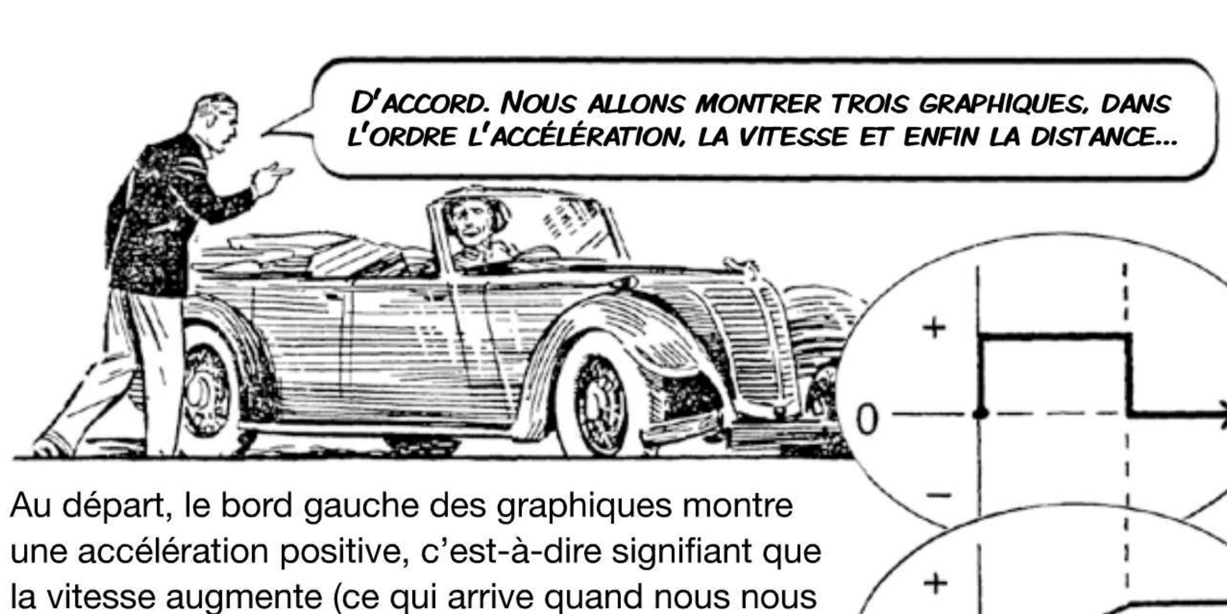


Le premier problème a été résolu par l'approche dite d'« épuisement » ; et le second en traçant des cordes à la courbe passant par le point singulier.

D'autres courbes étaient perçues comme des graphiques de fonctions, et dès lors, on pouvait considérer les problèmes d'aires de deux points de vue différents. D'un côté, une aire peut être « épuisée » en y insérant de minces bandes verticales ; de l'autre, l'aire vue comme **une nouvelle fonction** est justement celle dont la dérivée est égale à la fonction initiale. Survient alors une seule méthode, qui prend en compte les dérivées et leurs fonctions inverses, résolvant du même coup les deux catégories de problème.

Commençons par les dérivées et leurs fonctions inverses.

Nous pouvons examiner comment la procédure est mise en œuvre dans le cas de notre véhicule qui avance et pour les trois graphiques de distance, de vitesse et d'accélération. Au lieu de regarder les graphiques en partant de la fonction de distance x(t) et de progresser par les dérivées, commençons l'analyse au niveau des dérivées pour ensuite remonter le problème et finir à la fonction de distance.

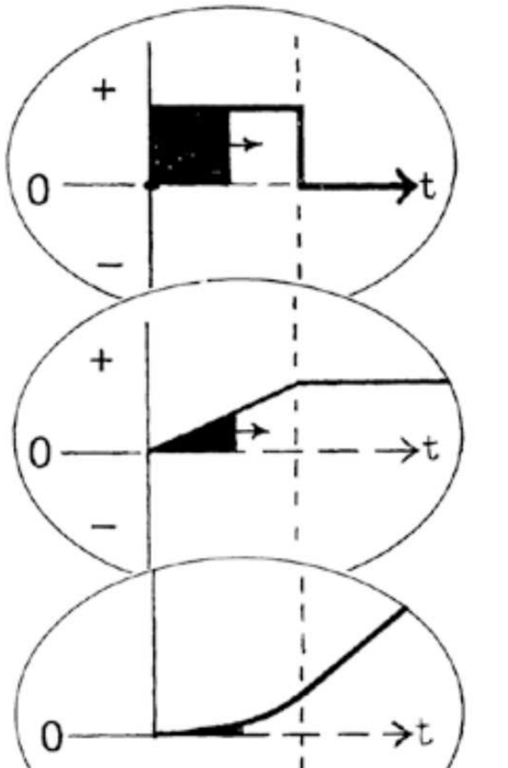


Au départ, le bord gauche des graphiques montre une accélération positive, c'est-à-dire signifiant que la vitesse augmente (ce qui arrive quand nous nous mettons en route).

Nous observons qu'une accélération constante produit un graphique qui est une droite pour la représentation de la vitesse,

et une courbe (plus précisément une parabole) pour celle de la distance.

Observez à nouveau, pendant qu'un point avance dans le temps le long d'axes qui définissent une **aire** sous les deux courbes du bas. C'est ici la clef de toute l'affaire… alors regardez bien.

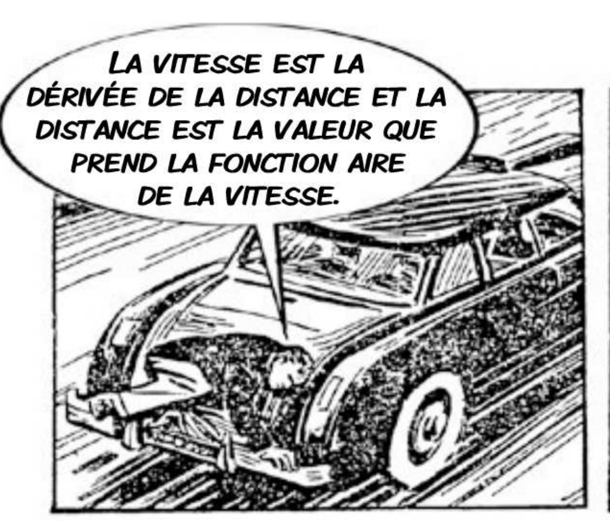


Dans le graphique d'accélération, l'aire qui grandit couvre peu à peu un rectangle ; l'aire augmente proportionnellement au temps passé. Et vous constatez que c'est exactement le comportement du graphique de vitesse !

Et le graphique de vitesse définit un triangle qui s'accroît, son aire augmente d'abord lentement puis plus rapidement ;

et vous constatez que c'est exactement la forme du graphique de vitesse !

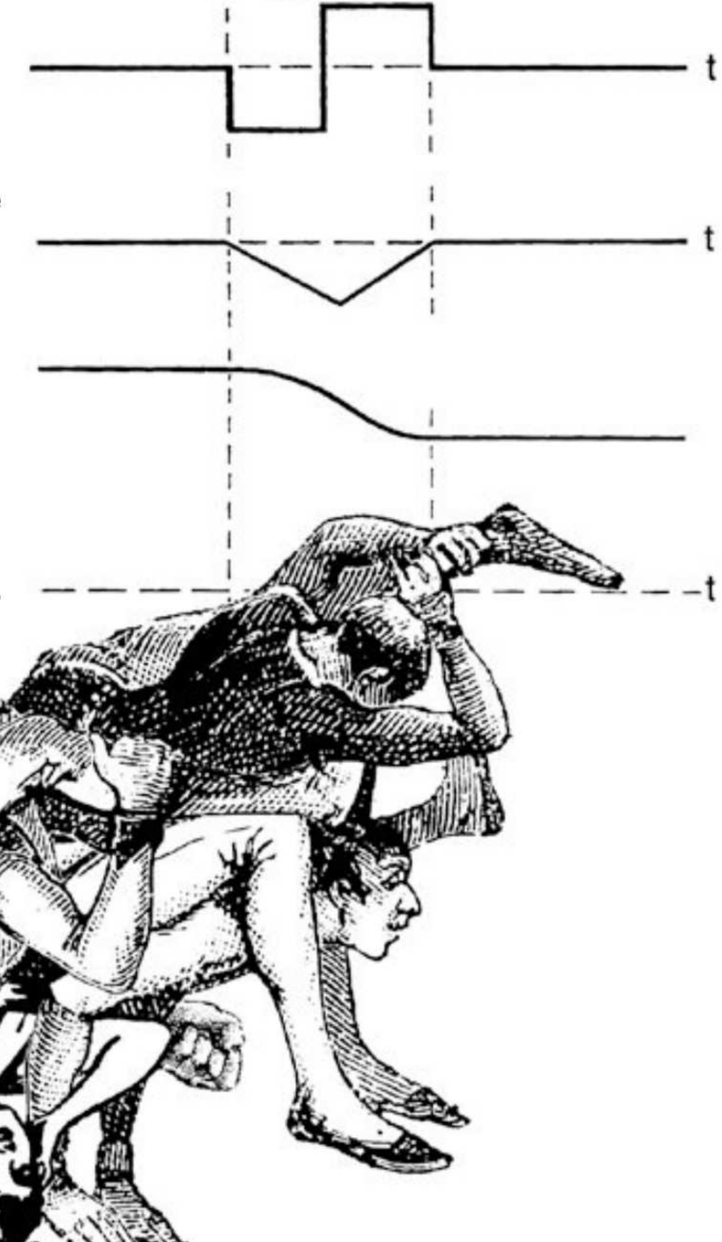
Nous pouvons voir que si l'une des fonctions est la **dérivée** (ou taux de changement), alors l'autre est la **fonction d'aire** de la première !

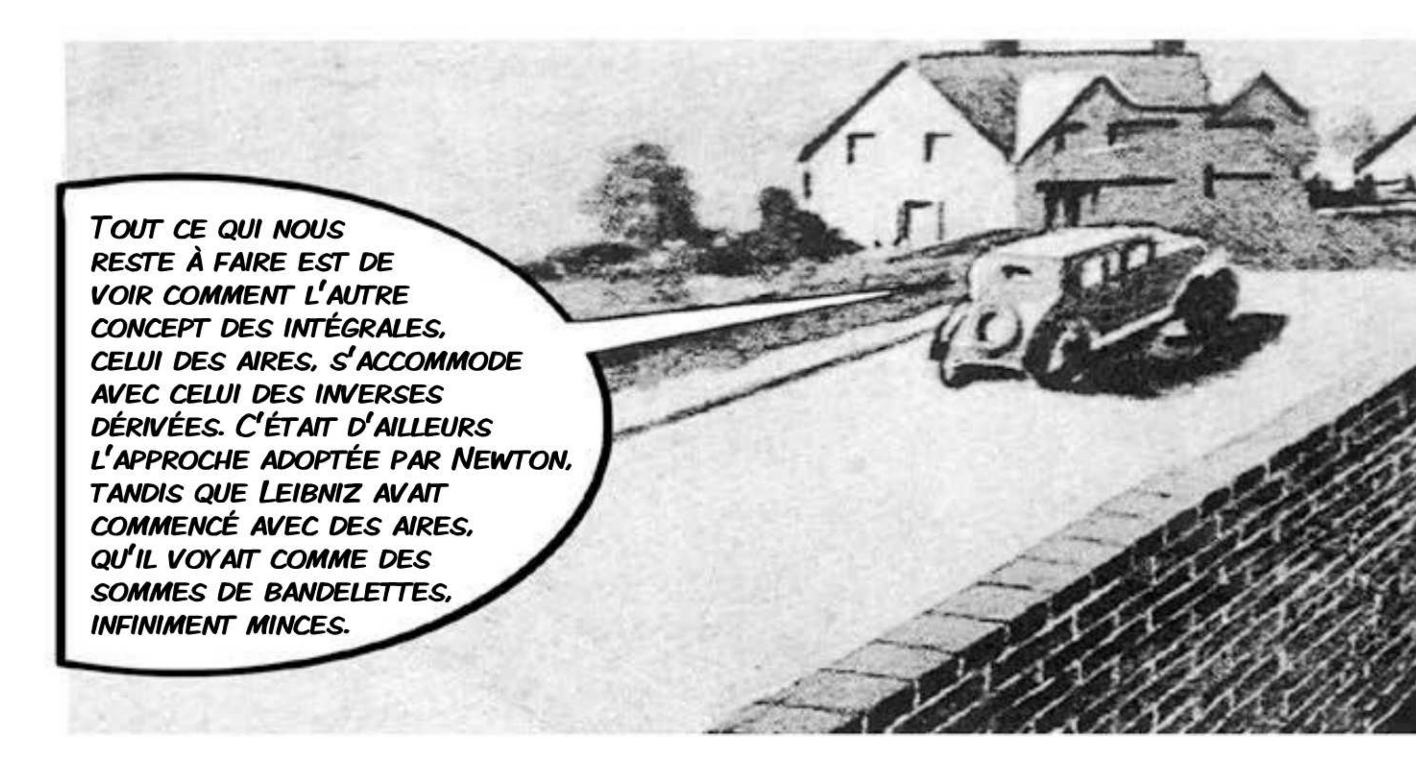




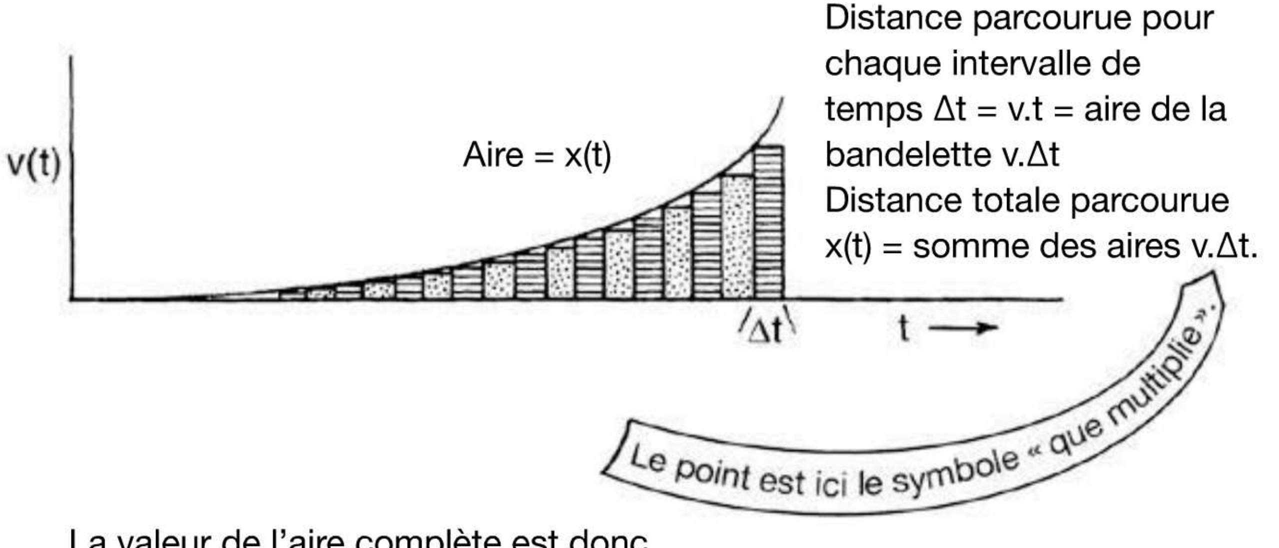
Vous pouvez vérifier ces affirmations par vous-même, pour voir ce qui se passe quand le véhicule engage la marche arrière. L'accélération devient alors négative, construisant une aire négative (sous l'axe t) ; ainsi, la vitesse devient négative de façon constante.

Et vous pouvez noter qu'au fur et à mesure que la distance augmente, la courbe diminue (comme une parabole à l'envers). Quand le véhicule s'arrête, son accélération devient nulle en même temps que sa vitesse, et la distance parcourue devient constante.





Si l'on commence avec une courbe de vitesse v(t), nous pouvons imaginer son « aire » couverte de minces bandelettes. Chaque bandelette a une base Δt et une hauteur v(t).



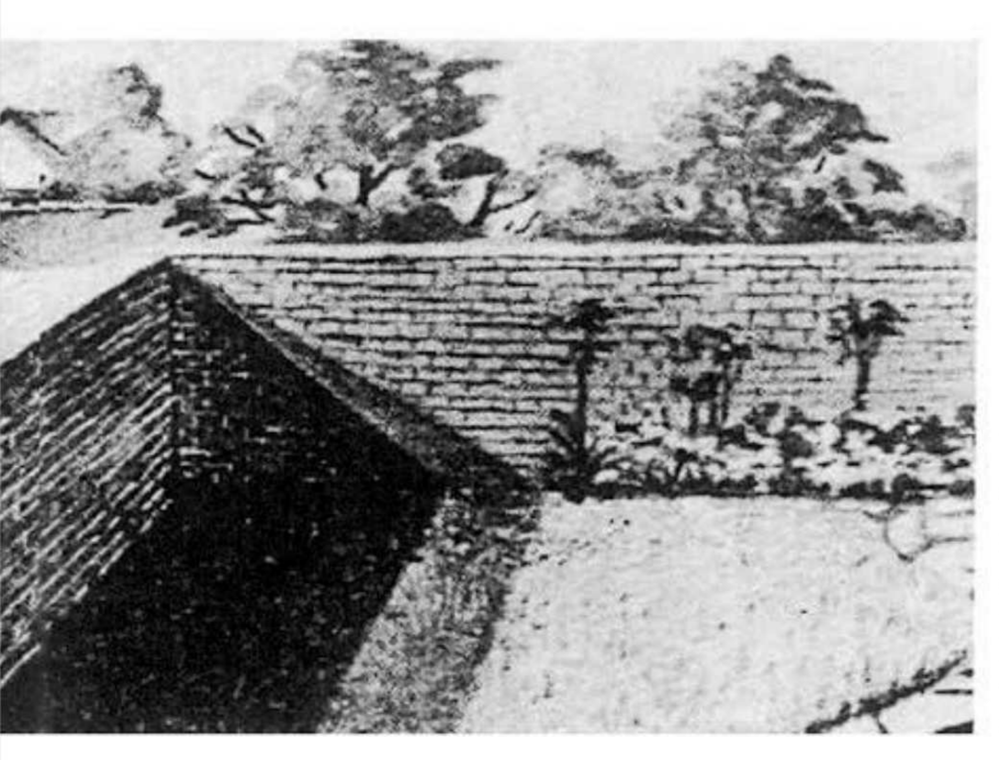
La valeur de l'aire complète est donc

somme de {toutes les bandelettes v(t).Δt}.

Chacune des aires décrit une distance x, parcourue à vitesse constante v dans un intervalle de temps t.



$\int v(t)dt$



Pour en revenir au rapport inverse dérivée, nous devons simplement imaginer la dernière des bandelettes minces, soit Δx.

Puisque $\Delta x = v.\Delta t$

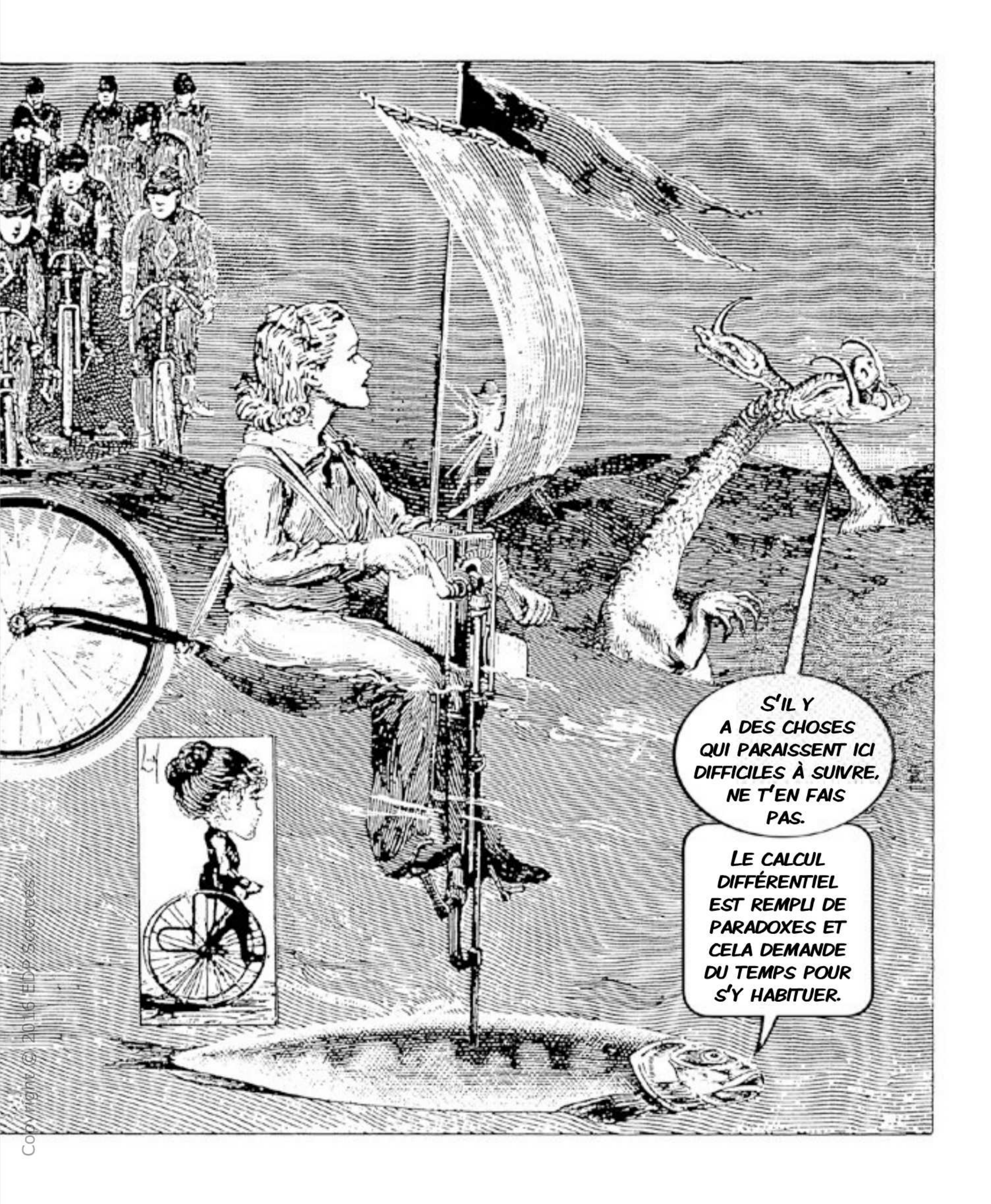
alors $\Delta x/\Delta t = [v.\Delta t]/\Delta t$

et $dx/dt = v(t)$.

Ainsi, la dérivée de l'intégrale définie comme la somme des bandelettes est simplement la même fonction dont l'aire a produit l'intégrale.

Il devient (relativement) facile d'identifier les dérivées de fonctions exprimées de façon algébrique ou en termes de certaines fonctions spéciales. Pour trouver, par exemple, la forme algébrique de la fonction aire, nous devons trouver la fonction particulière dont la dérivée est la fonction d'origine. Certains problèmes des propriétés de courbes (prises en entier) sont réduits à des problèmes plus simples de propriétés de courbes à un point singulier.

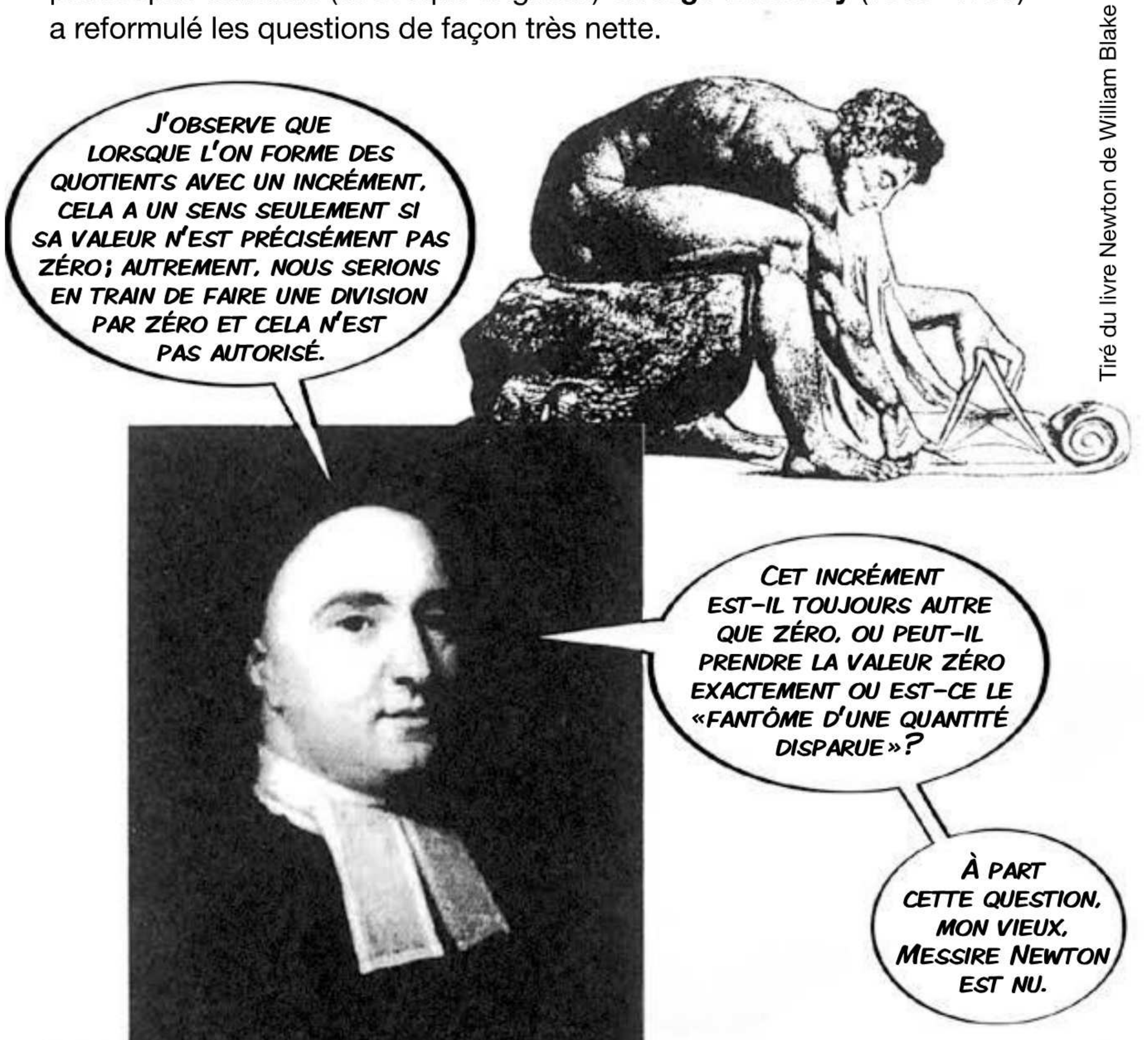




Au début, le calcul intégral s'appliquait à la mécanique et à l'astronomie. Les techniques dites des équations différentielles ont mené à la physique mathématique. Et alors seulement nous avons vu émerger les sciences de la chaleur, de l'électricité et le magnétisme. Le monde scientifique moderne, qui sous-tend le monde de la technologie moderne, dépend assez étroitement des développements du calcul intégral et différentiel.

Les questionnements de Berkeley

Revenons au concept de l'incrément et du mystère de le voir se réduire à zéro. En leur temps, Newton et Leibniz ont été questionnés à ce sujet mais n'ont pas su donner de réponses satisfaisantes. C'est par la suite que le philosophe irlandais (et évêque anglican) **George Berkeley** (1685–1753) a reformulé les questions de façon très nette.

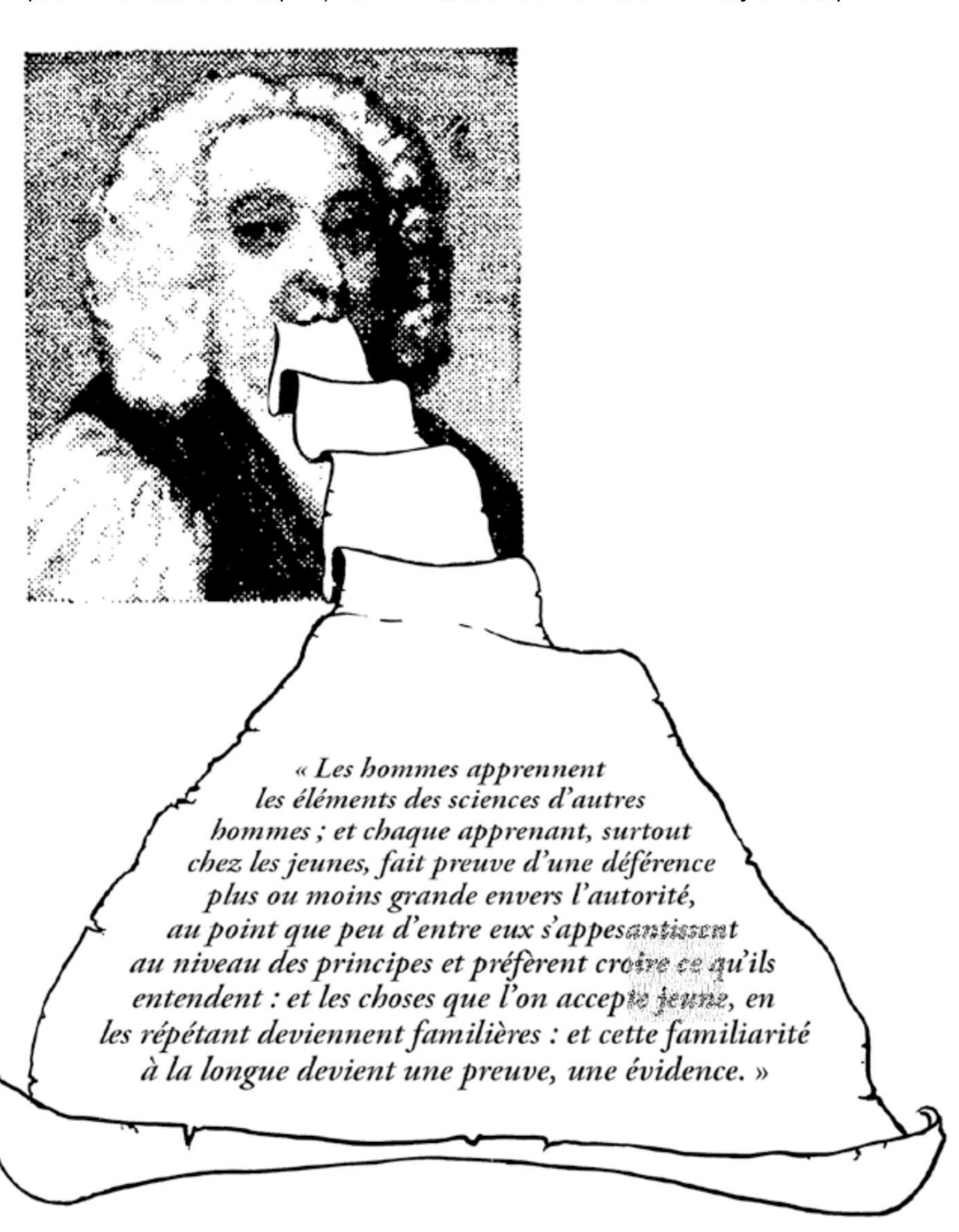


Tiré du livre Newton de William Blake

L'objectif de Berkeley était de démontrer que les « libres penseurs » – qui défendaient la thèse que la science et la raison remplaceraient prochainement les mystères et les superstitions des croyances religieuses – étaient aussi obscurs et dogmatiques que les pires théologiens. Dans le sous-titre de son pamphlet, Berkeley pose la question de savoir « […] si l'objet, les principes et les inférences des analyses modernes étaient plus distinctement conçues ou plus clairement déduites que les Mystères de la Religion et les dogmes de foi ». Pour Berkeley, la réponse était clairement…

NON !

Certains mathématiciens ont essayé de fournir des réponses au pamphlet de Berkeley, intitulé *The Analyst*. Berkeley a utilisé leurs réponses pour mettre en évidence leurs confusions et ce, de manière très cruelle. Sa réponse, sous le titre *A Defence of Freethinking in Mathematics* (Pour la défense de la libre pensée en mathématiques) est un véritable chef d'œuvre d'analyse critique.



Berkeley avançait l'idée que le simple apprentissage de méthodes pour résoudre des problèmes mathématiques ou scientifiques ne nous aide pas forcément à comprendre la nature profonde des problèmes. Il a anticipé l'image que nous a laissée **T. S. Khun** (1922–1995) qui voyait « la science normale » comme une pratique de « résolutions de puzzles » au sein d'un paradigme qui n'admet pas de questionnement critique, tant que cela fonctionne. Pour Kuhn, la science normale est assez étriquée, et l'enseignement des sciences (y compris les mathématiques) est nécessairement plutôt dogmatique.



Le dieu d'Euler

Il revient à un mathématicien suisse, **Leonhard Euler** (1707–1783) d'avoir été le premier à faire le lien entre fonctions exponentielles et logarithmiques et à avoir établi une formule de cette relation.

Euler était un génie mathématique extraordinaire et les récits de ses prouesses sont « légion ». Il était employé à la cour de Frédéric II, dit le Grand, de Prusse, où il a rencontré l'encyclopédiste et philosophe **Denis Diderot** (1713–1784). Diderot était un athée endurci…

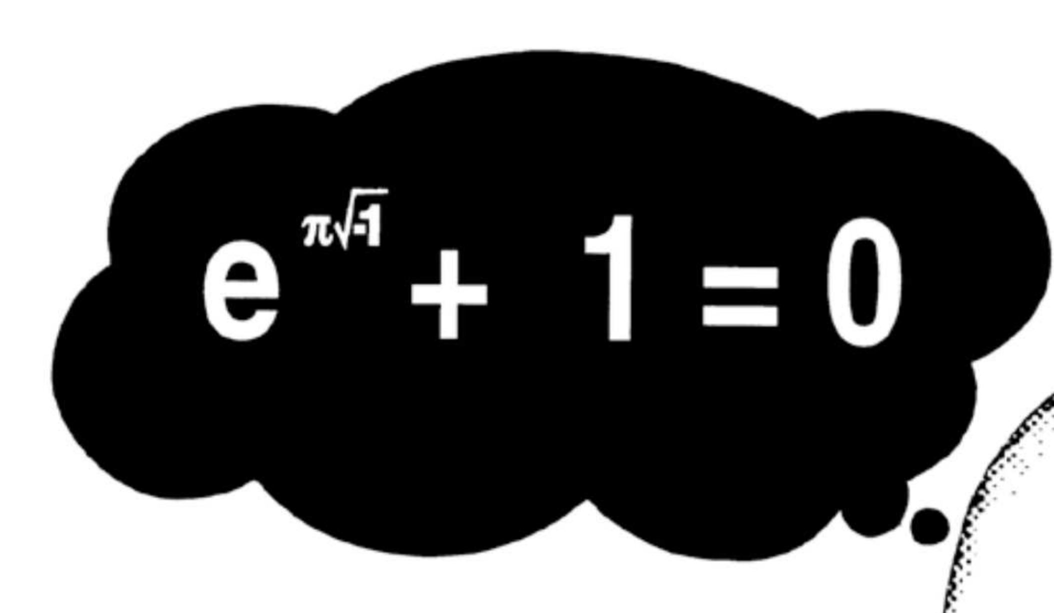


Diderot était abasourdi et s'est réfugié dans la sécurité et le réconfort des *salons* parisiens.

La formule dont il est question dans cette histoire n'a rien de spécial. Mais Euler a également développé une des plus belles formules existant en mathématiques, qui invite à s'arrêter un instant pour y réfléchir.

Il s'agit d'une formule transcendante et mystérieuse qui relie cinq des nombres les plus fondamentaux de l'Univers :



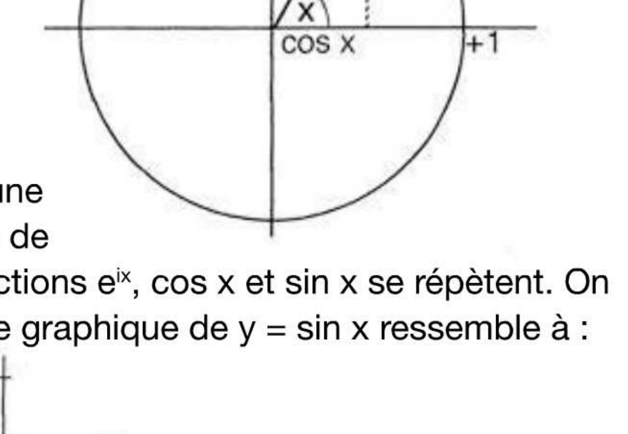


En sens inverse, le premier est le zéro, un quasi-nombre mystérieux. Ensuite vient l'unité, 1, le fondement de tous les autres nombres. Il apparaît également sous une formulation négative, la racine carrée de moins un, $\sqrt{-1}$, désigné aussi par « i », qui est l'unité de base des nombres imaginaires ayant fasciné tant de cultures et de civilisations. Puis vient la plus ancienne des constantes, π, qui donne le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Et le dernier nombre, celui qui a été découvert le plus récemment, est le nombre e, c'est-à-dire la base naturelle de la croissance exponentielle.

Peut-on imaginer avoir découvert un tel rapport par tâtonnements et expérimentions, aussi longtemps que ceux-là puissent durer ?

En réalité, la formule divine d'Euler vient d'une fonction qu'il avait découverte, reliant les nombres complexes aux fonctions trigonométriques découvertes par les mathématiciens arabes (voir p. 85).

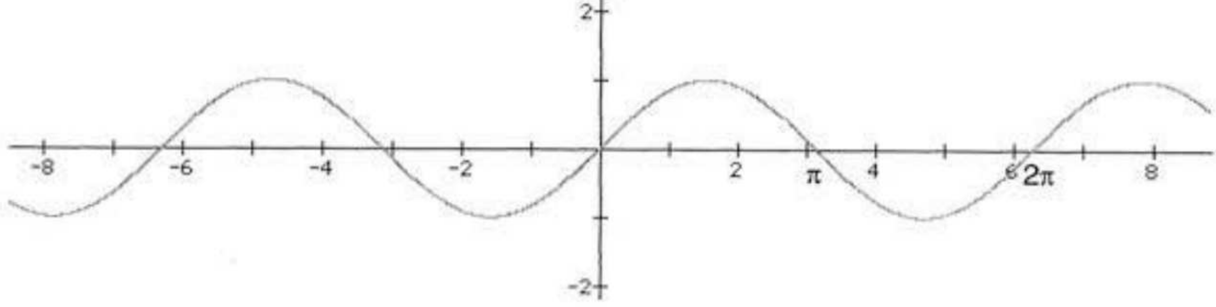
Nous avions déjà vu que la fonction e^x correspond à un graphique avec croissance rapide (voir p. 99). En revanche, le graphique de $e^{\sqrt{(-1)}x}$ est un cercle ! Le rayon de ce cercle est 1 et x est l'angle formé par la droite de l'origine jusqu'au point. Et comme le point parcourt la circonférence du cercle, x augmente, passant de 0 à 2π. Si maintenant nous examinons le graphique d'un point de vue trigonométrique, nous notons que la partie réelle du nombre $e^{\sqrt{(-1)}x}$ est le cosinus de x (cos x) et la partie imaginaire sin x.



Nous pouvons donc écrire :

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ où i est le symbole couramment employé pour $\sqrt{-1}$.

Si le point parcourt la circonférence une seconde fois, et que x continue donc de croître, quel sera le résultat ? Les fonctions e^{ix}, cos x et sin x se répètent. On dit alors qu'elles sont **périodiques** ; le graphique de y = sin x ressemble à :



En réalité, cela représente un certain nombre de phénomènes qui « alternent » avec le temps, comme le courant électrique, ou des ondes qui se propagent dans l'espace, comme le son. Les sinus et les cosinus sont les blocs de toutes les formes complexes d'ondes qui véhiculent de l'information ou des messages. En s'en servant pour faire des mathématiques, on peut, avec cette forme « exponentielle imaginaire », transformer des calculs particulièrement ardus en exercices relativement simples et clairs.





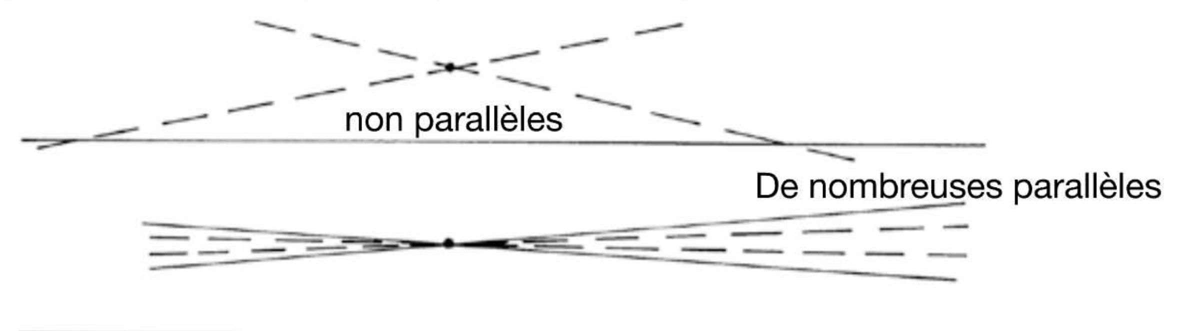
Les géométries non Euclidiennes

Nous avons vu qu'Euclide avait déduit ses compétences en géométrie à partir de quelques « notions courantes » et de quelques postulats « évidents ». L'un de ces postulats, à propos de la non-convergence de lignes parallèles, ressemble davantage à un théorème. Il a créé l'embarras pendant des siècles, car il jetait des doutes sur la véracité et la perfection du « système » euclidien. Mais il est soudain devenu la base d'un grand bond en avant dans l'imagination mathématique : à savoir l'invention de la géométrie non euclidienne.

Plusieurs mathématiciens y sont parvenus, le premier d'entre eux ne le sachant pas ! C'était un jésuite, **Giovanni Girolamo Saccheri** (1667–1733) résolu à en finir avec les objections, une fois pour toutes. Dans son livre *Euclid cleared of all blemish* (Euclide blanchi de toute tare), publié en 1733, il a tenté de démontrer qu'il serait, somme toute, impossible de faire de la géométrie sans le postulat sur les droites parallèles.

En réalité, ses résultats n'avaient rien de faux et ont été même repris par de réels inventeurs, qui savaient ce qu'ils faisaient.

Il y a de nombreuses façons d'exprimer le Postulat des parallèles. Pour nous, si nous avons une droite et un point hors ligne, il ne peut y avoir qu'une droite qui passe par ce point, parallèle à la première droite. Si ce n'est pas le cas, il n'existe aucune parallèle, ou il en existe plusieurs.



Tout d'abord, le cas évoqué de nombreuses parallèles a été découvert, presque en même temps, par deux mathématiciens, le Hongrois **Janos Bolyai** (1806–1860) et le Russe **Nikolai Lobachevski** (1792–1856). Un peu plus tard, l'Allemand **Georg Riemann** (1826–1866) a étudié le second cas, c'est-à-dire avec **aucune** parallèle. On s'est alors rendu compte que ces formes de géométrie pouvaient être mises en œuvre par des constructions sur des surfaces spéciales.

Dans le cas de la géométrie de Riemann, la sphère est une bonne illustration, si nous adoptons la convention que « ligne » signifie « grand cercle » (orthodromie). C'est la courbe sur la surface faite par un plan qui passe par le centre de la sphère. (Voir p. 84 pour la trigonométrie sphérique.) Puisque deux grands cercles doivent nécessairement se rencontrer en deux endroits ; par conséquent, il ne peut y avoir de parallèles.

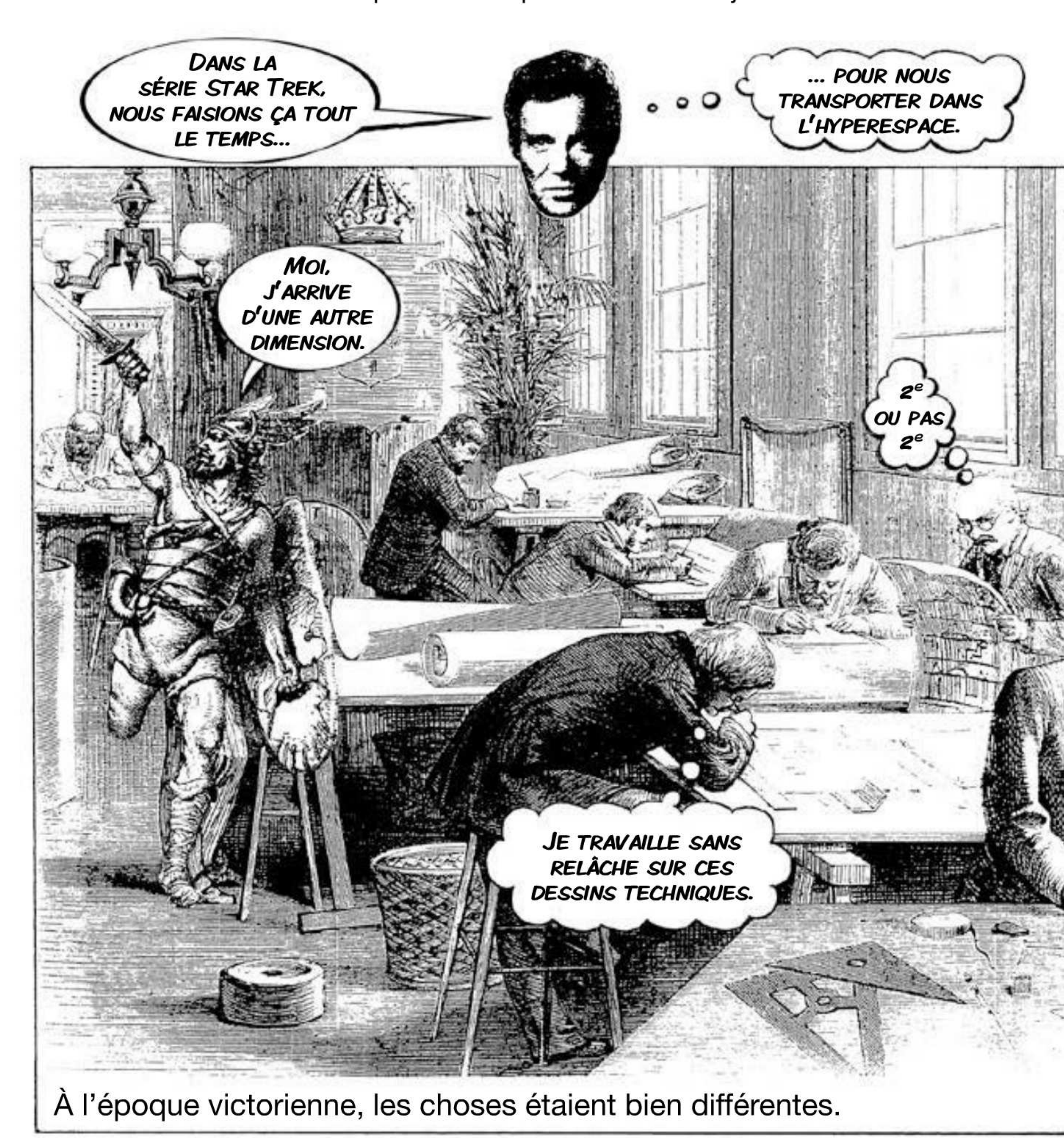


Nous pouvons assimiler une « ligne » au chemin le plus court entre deux points. Or, il se trouve qu'il y a de nombreuses « parallèles » qui ne rencontreront jamais cette ligne.

Au fur et à mesure que les gens s'habituaient à l'idée de géométries non-euclidiennes, cela renforçait le credo que les mathématiques apportent des vérités à la fois logiques et infaillibles. Mais il a fallu longtemps avant que cette idée révolutionnaire soit admise pour de bon.

Les espaces à N dimensions

Un autre développement contre-intuitif en géométrie concernait l'étude des espaces construits avec plus de trois dimensions ? Une extension du système cartésien de la géométrie algébrique pour inclure d'autres dimensions était tout à fait simple. Au lieu de se positionner sur un plan avec les coordonnées (x, y), un point défini dans l'hyperespace pouvait avoir les coordonnées $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Bien entendu, les propriétés des courbes dans de tels hyperespaces étaient très différentes de celles rencontrées dans deux ou trois dimensions. Mais le fait de concevoir des systèmes avec de nombreuses dimensions ne pose aucun problème de nos jours.

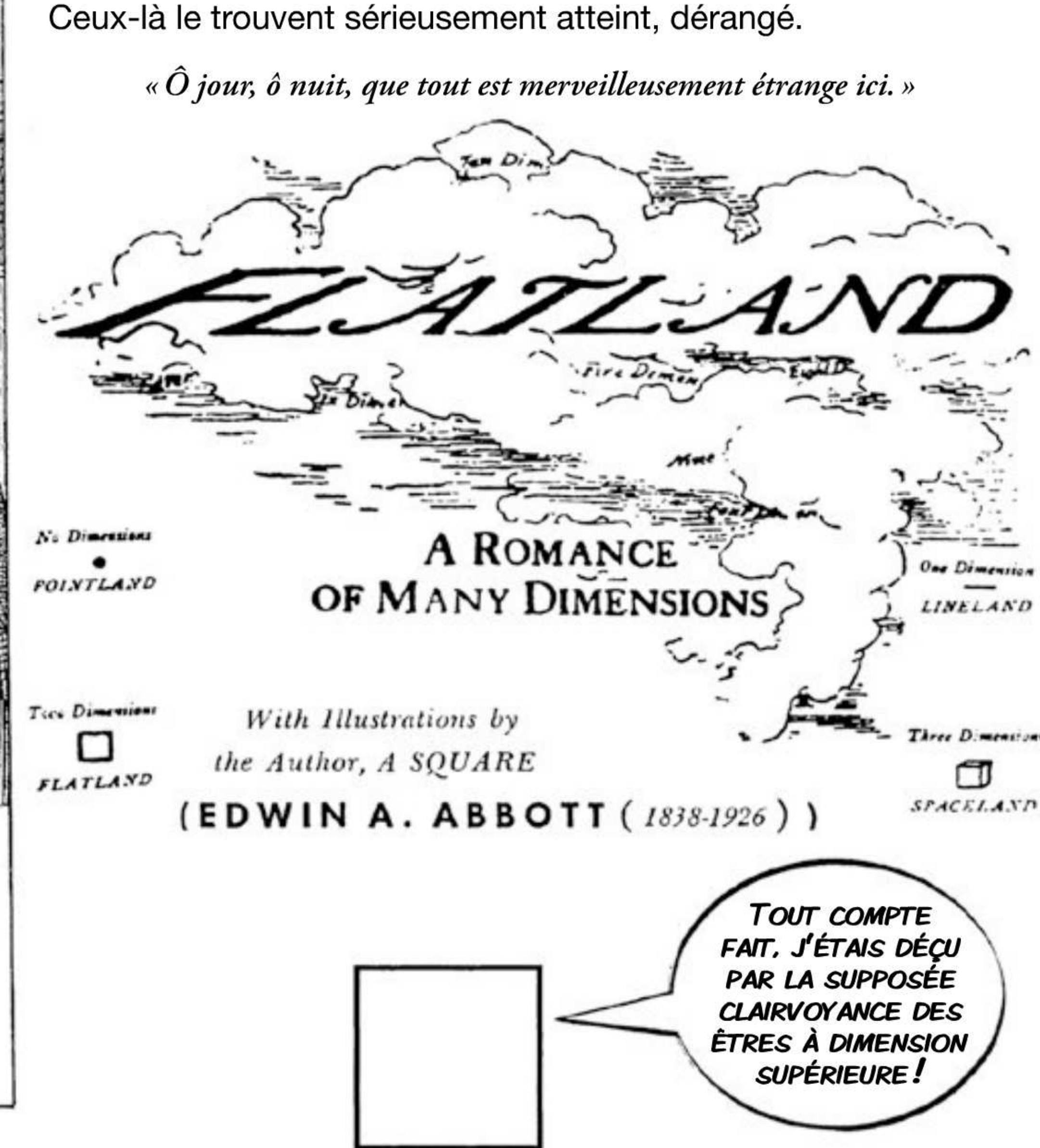


À l'époque victorienne, les choses étaient bien différentes.

Un petit chef d'œuvre de fiction mathématique et de critique sociale s'intitule *Flatland* (Plat Pays) traite du sujet. Il décrit une société où les habitants sont des polygones, vivant sur un plan. Tout comme les victoriens, les Flatlanders sont obnubilés par leur statut social, fonction du nombre de côtés qu'ils possèdent. Les gentilshommes en ont quatre, les aristocrates beaucoup, les ouvriers trois et les femmes sont fines comme des aiguilles !

Le héros du livre, dénommé *Square* (« Carré »), a une expérience d'un monde à trois dimensions, s'étant lié d'amitié avec une Sphère. Cet être supérieur n'apparaît que tous les 500 ans, se manifestant d'abord comme un point qui devient un cercle, grandit, puis diminue pour finalement disparaître. Ce que les Flatlanders ne comprennent pas, c'est comment la Sphère passe au travers de leur plan. La Sphère prend le *Square* en amitié et l'emmène faire un voyage dans l'espace. Elle lui montre « Lineland » et « Pointland », peuplés de gens très satisfaits d'eux-mêmes. Elle lui permet de scruter la vie privée des Flatlanders. Mais, de retour sur le plan, le *Square* souffre beaucoup. Il essaie de décrire l'Espace à ses amis Flatlanders mais comment se faire valoir auprès d'eux ? Ceux-là le trouvent sérieusement atteint, dérangé.

« Ô jour, ô nuit, que tout est merveilleusement étrange ici. »

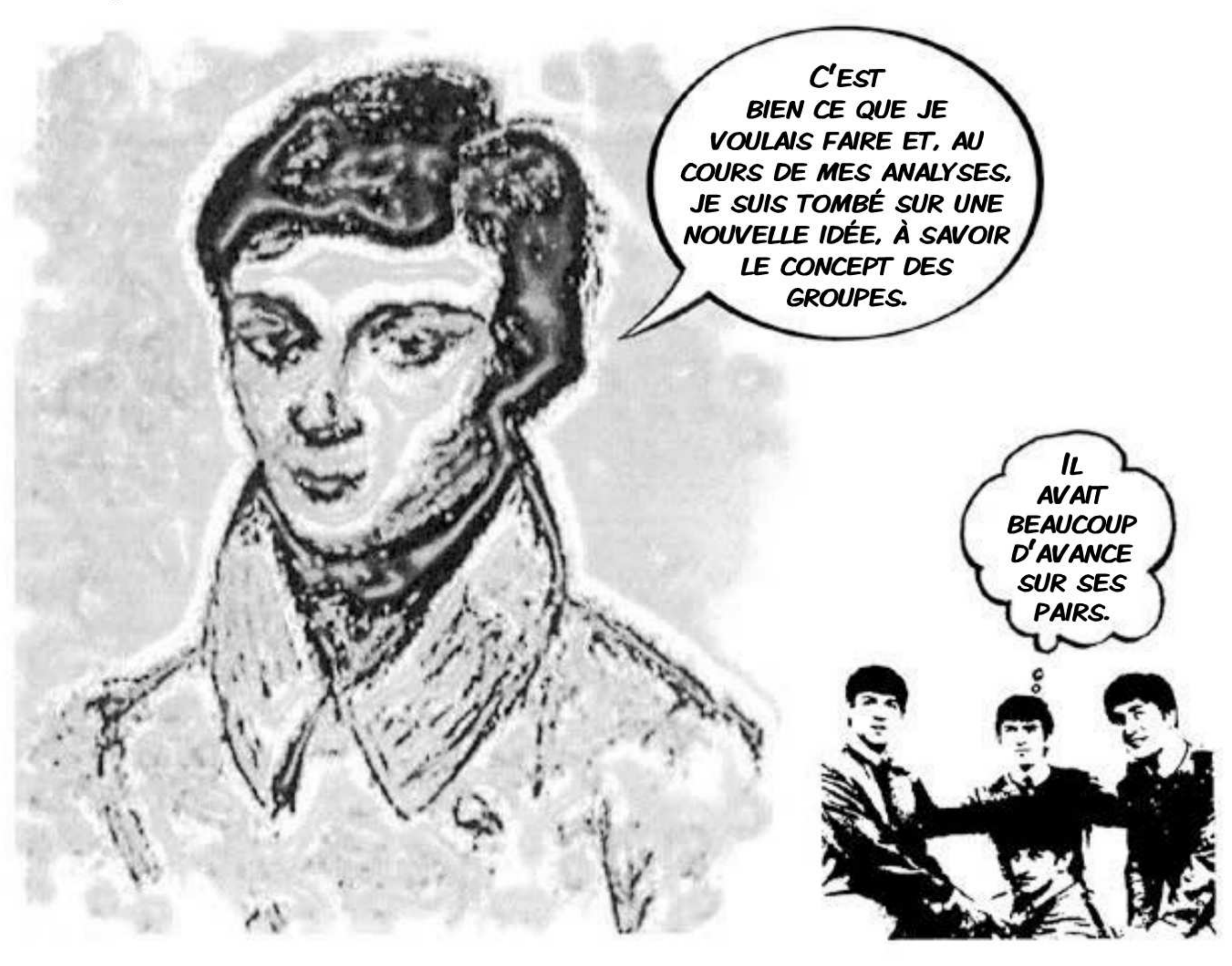


Évariste Galois

Pendant tout le XIXe siècle, l'algèbre a connu un « puissant » essor, comme outil d'investigation, de généralités et d'abstractions. Elle est devenue de plus en plus **formelle**. Petit à petit, a émergé l'idée que ce système de formalisme pouvait s'appliquer à autre chose que les nombres et leurs applications arithmétiques.

Un grand pas dans ce sens a été franchi par le mathématicien français **Évariste Galois** (1811–1832), sans aucun doute l'un des personnages les plus tragiques de l'histoire des mathématiques. C'était un ardent républicain dans une période de vives réactions politiques. Il se peut que le jeune Évariste ait été victime *d'agents provocateurs* officiels, qui avaient manigancé une affaire de cœur entre le malheureux et la fiancée d'un célèbre duelliste. C'est ainsi qu'il est mort, à l'âge de 21 ans. « Je meurs victime d'une infâme coquette », écrit-il la veille de sa mort, dans un manuscrit contenant toutes ses idées. Document qui a failli être perdu mais finalement a été retrouvé et publié 14 ans plus tard.

Galois s'était attaqué à un vieux problème : trouver une solution en racines carrées à l'équation quintique générale $x^5 + \ldots = 0$. De son vivant, il y avait un consensus parmi les mathématiciens selon lequel la tâche était impossible, mais personne n'a réussi à le démontrer.



Les groupes



Les groupes sont des structures mathématiques définis par des éléments et des règles de combinaison. On peut les considérer comme des systèmes arithmétiques mais sans nombres. Les éléments qui les composent peuvent ne pas avoir de lien avec du comptage ou avec des mesures, et ils ne sont pas des « nombres » dans le sens habituel du terme. Galois s'était rendu compte qu'il pouvait y avoir des séquences d'opérations se comportant comme des additions.

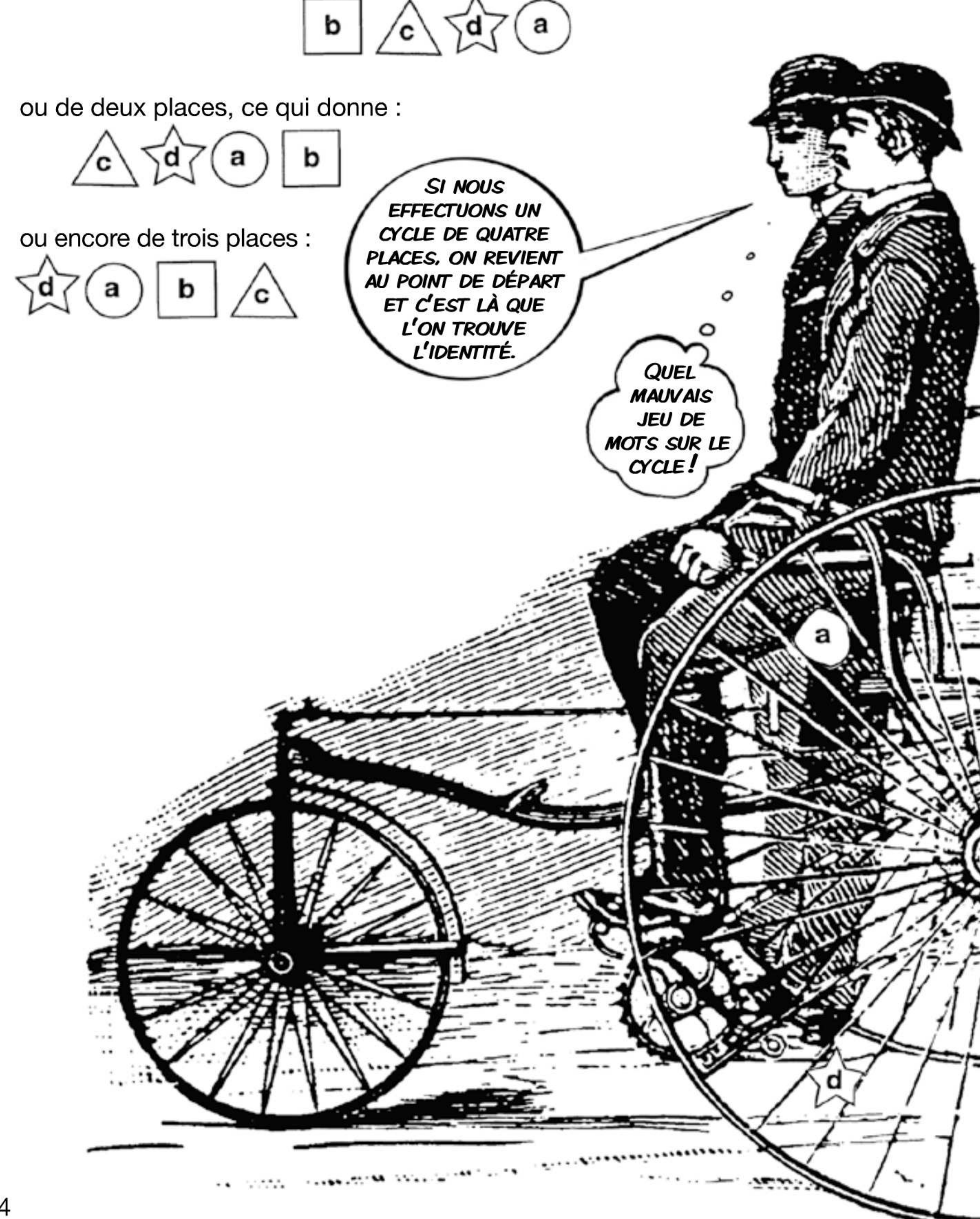
Ces séquences obéissent à quelques propriétés seulement :

- pour deux éléments quelconques, il existe un troisième qui résulte d'une combinaison des deux premiers, telle que 2 + 2 = 4 ;
- il existe un élément « identité », qui ne modifie pas l'élément auquel il est combiné, tel que dans 2 + 0 = 2 ;
- pour tout élément, il existe une inverse qui, lorsqu'elle est combinée à l'élément, donne l'identité ; ainsi 2 + (–2) = 0.

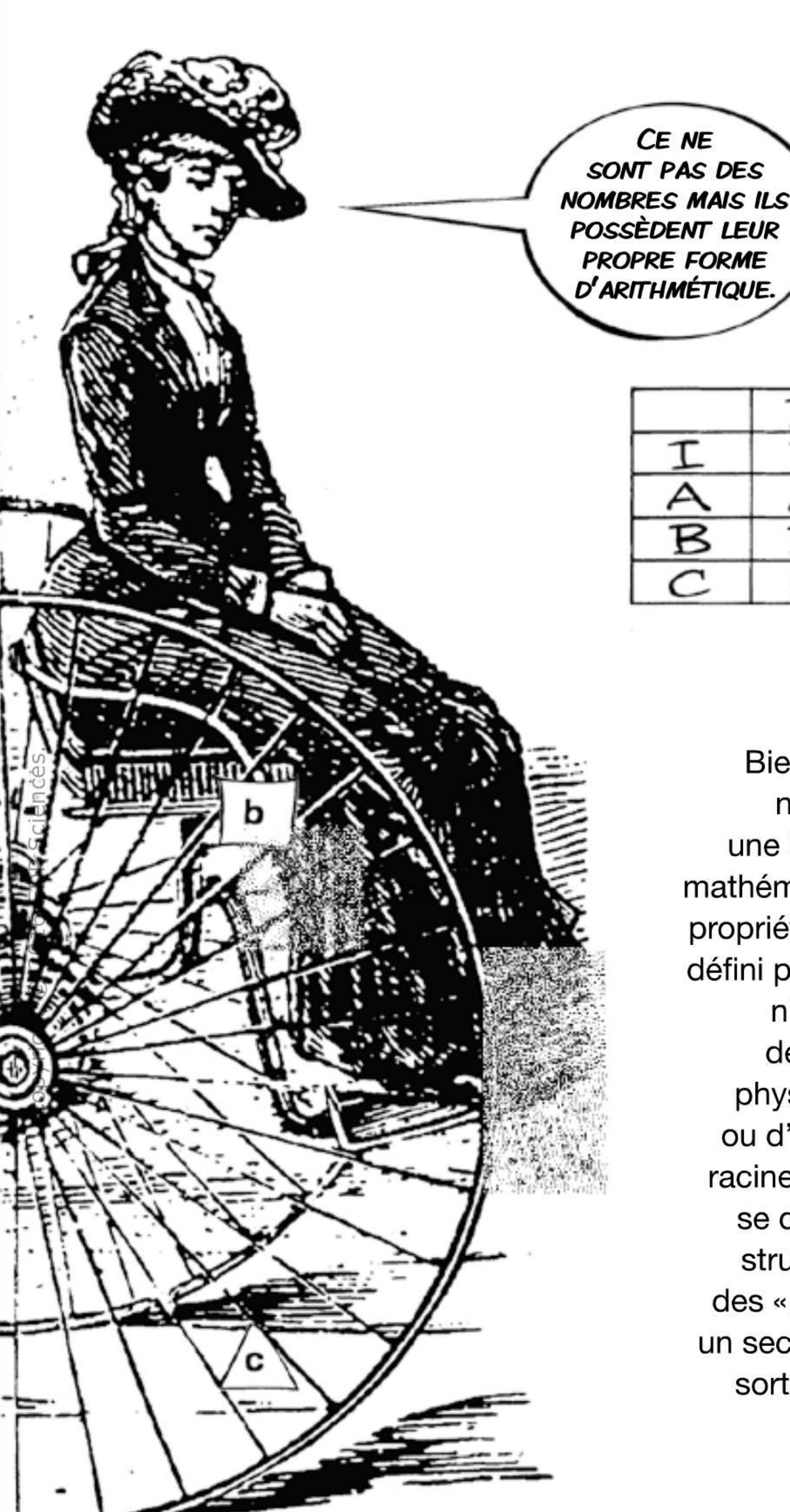
Pour l'illustrer, voici une version très simplifiée de ce que Galois a fait ; en l'occurrence, un ensemble de quatre objets,

a b c d

Ceux-ci ne sont pas les éléments du groupe. Le groupe comprend les opérations de manipulation de ces quatre objets. Nous imaginons un « cycle » en bougeant, par exemple, les éléments d'une place, ce qui donne :



On aurait pu désigner les cycles par les majuscules A, B, C et I. Dans ce cas, A + C est équivalent à un « cycle » de 1 + 3 places, c'est-à-dire de quatre places au total, soit trois plus une identité ! Il est alors facile de construire une table d'additions complète avec cet ensemble de quatre éléments.



	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

Bien que l'exemple donné soit on ne peut plus simple, il renferme une idée de taille, à savoir que des mathématiciens peuvent examiner les propriétés d'un système d'opérations défini par une table d'additions. Nous n'avons pas besoin d'exemples de système pour des processus physiques tels que le mouvement, ou d'objets algébriques comme les racines d'une équation. La structure se définit par elle-même. De telles structures n'ont pas besoin d'être des « groupes » ; il peut y avoir aussi un second jeu de combinaisons, une sorte de « table de multiplication ».



L'algèbre de Boole

Bientôt, les scientifiques commencent à examiner d'autres formes d'opération. L'une des analyses les plus percutantes a été menée par un mathématicien britannique, **George Boole** (1815–1864), analyse qui a permis d'appliquer des méthodes mathématiques à des entités non quantifiables, telles que les arguments de logique.

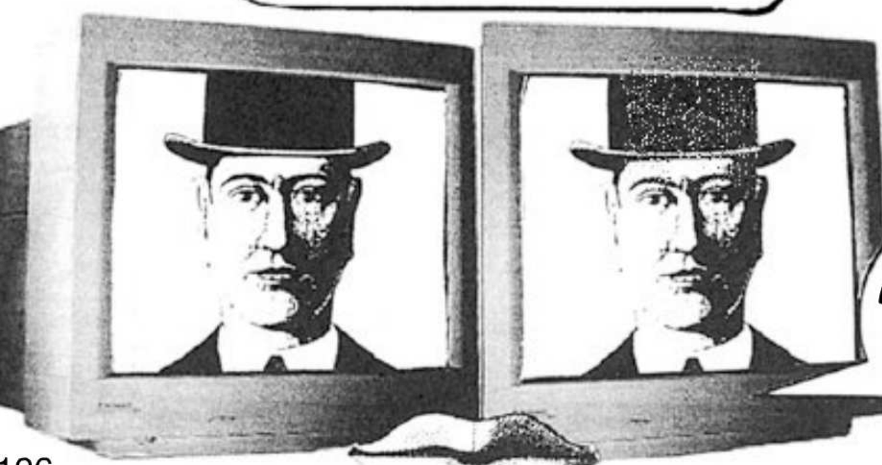
EN TOUTE MODESTIE, J'AI DONNÉ LE NOM DE « LOIS DE LA PENSÉE » À MES DÉCOUVERTES.

En langage contemporain, on parle de l'algèbre de combinaison d'ensembles ou de « l'algèbre de Boole ».

NOTRE INTERVENTION COMPREND À LA FOIS DES OPÉRATIONS D'UNION (S'ENTEND QUE L'ENSEMBLE QUI EN RÉSULTERA POSSÉDERA TOUS LES MEMBRES DE CHAQUE ENSEMBLE) ...

... ET D'INTERSECTION (SIGNIFIANT QUE L'ENSEMBLE FINAL N'AURA QUE DES MEMBRES AYANT APPARTENU AUX DEUX ENSEMBLES INITIAUX).

JE PRÉFÉRERAIS, SI CELA NE DÉRANGE PERSONNE, NE PAS PERDRE DE MEMBRE PENDANT L'OPÉRATION...



L'ALGÈBRE DE BOOLE ENTRE EN JEU CHAQUE FOIS QUE NOUS DEVONS FAIRE DES CHOIX ENTRE PLUSIEURS OPTIONS. DE MÊME, C'EST LA LOGIQUE QUI SOUS-TEND DES RECHERCHES SUR INTERNET.

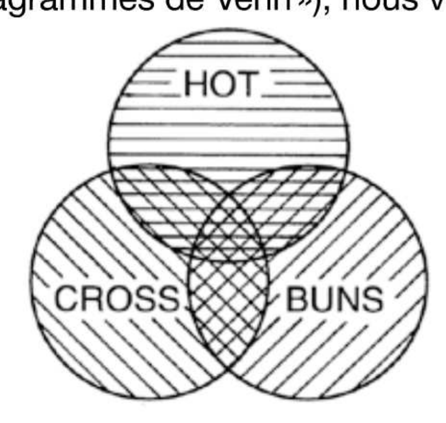
Supposons que nous cherchons une recette de cuisine pour faire des «Hot Cross Buns*», dont les mots clefs sont:

HOT, CROSS et BUNS.

Le moteur de recherche va nous demander d'indiquer si nous voulons les sites Internet contenant :

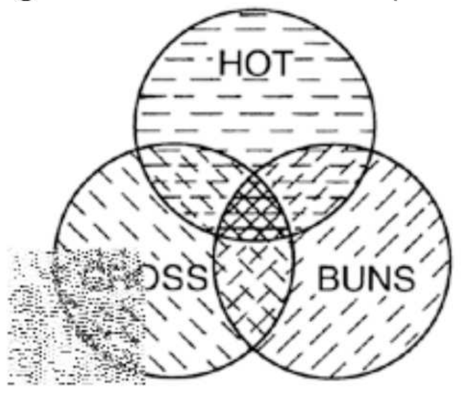
N'importe lequel des mots clefs ou Tous les mots clefs simultanément

Le premier choix va nous lister tous les sites avec soit HOT, soit CROSS, soit BUNS. Si maintenant nous en donnons la représentation graphique (appelée «diagrammes de Venn»), nous voyons:



En termes d'ensembles, {HOT} + {CROSS} + {BUNS}, cela donne une longue liste de sites avec beaucoup d'informations intéressantes mais non pertinentes par rapport à ce qui est recherché.

Si nous voulons «Hot Cross Buns» et rien d'autre, il s'agit d'une intersection avec les seuls sites qui contiennent et «hot» et «cross» et «buns». Le diagramme de Venn correspondant est :



En termes d'écriture d'ensembles, cela donne {HOT} × {CROSS} × {BUNS} et la recherche aboutira uniquement au(x) site(s) qui traite(nt) de «Hot Cross Buns».



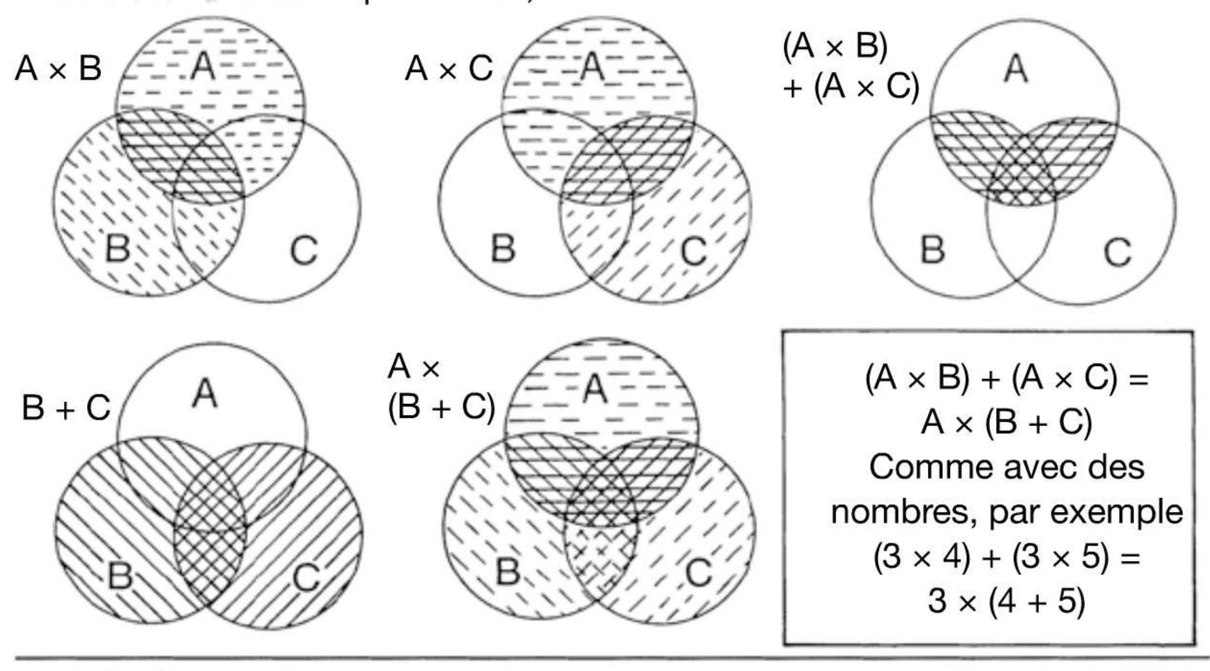
*Ed. Le petit pain brioché des Anglais, traditionnellement réalisé le jour du Vendredi Saint, à Pâques

L'arithmétique de l'algèbre de Boole est intéressante dans ce sens qu'à la différence de l'arithmétique « ordinaire », nous avons affaire à deux formes de relation distributive :

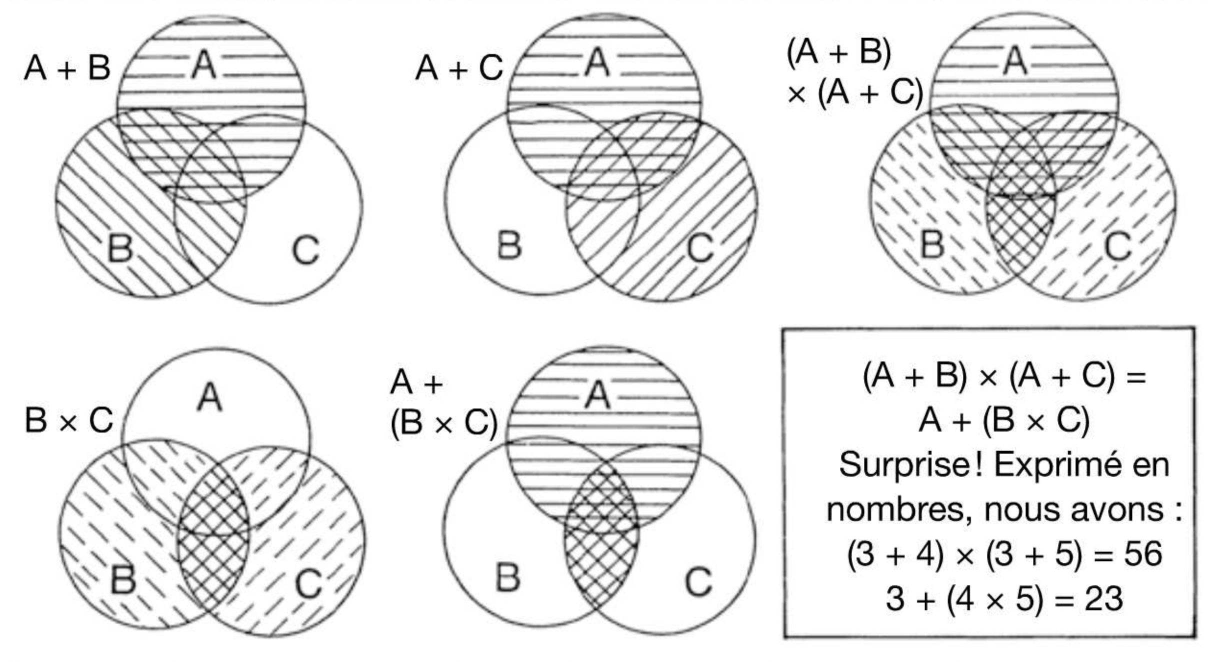
A × (B + C) = (A × C) mais aussi A + (B × C) = (A + C).

En termes d'arithmétique ordinaire, la première formule marche, tandis que la seconde ne marche pas. Mais dans le cas d'ensembles, où × est le symbole d'intersection et + le symbole d'union, les deux formules fonctionnent, comme on le voit dans le diagramme de Venn.

Voici la loi distributive qui marche, comme avec des nombres :



et pour la surprise…



Des exemples comme ceux-ci ont offert aux mathématiciens de vastes champs de liberté pour exercer pleinement leur imagination. L'arithmétique telle qu'étudiée par les mathématiciens modernes est devenue rapidement très différente de celle que nous avons pratiquée avec des nombres.

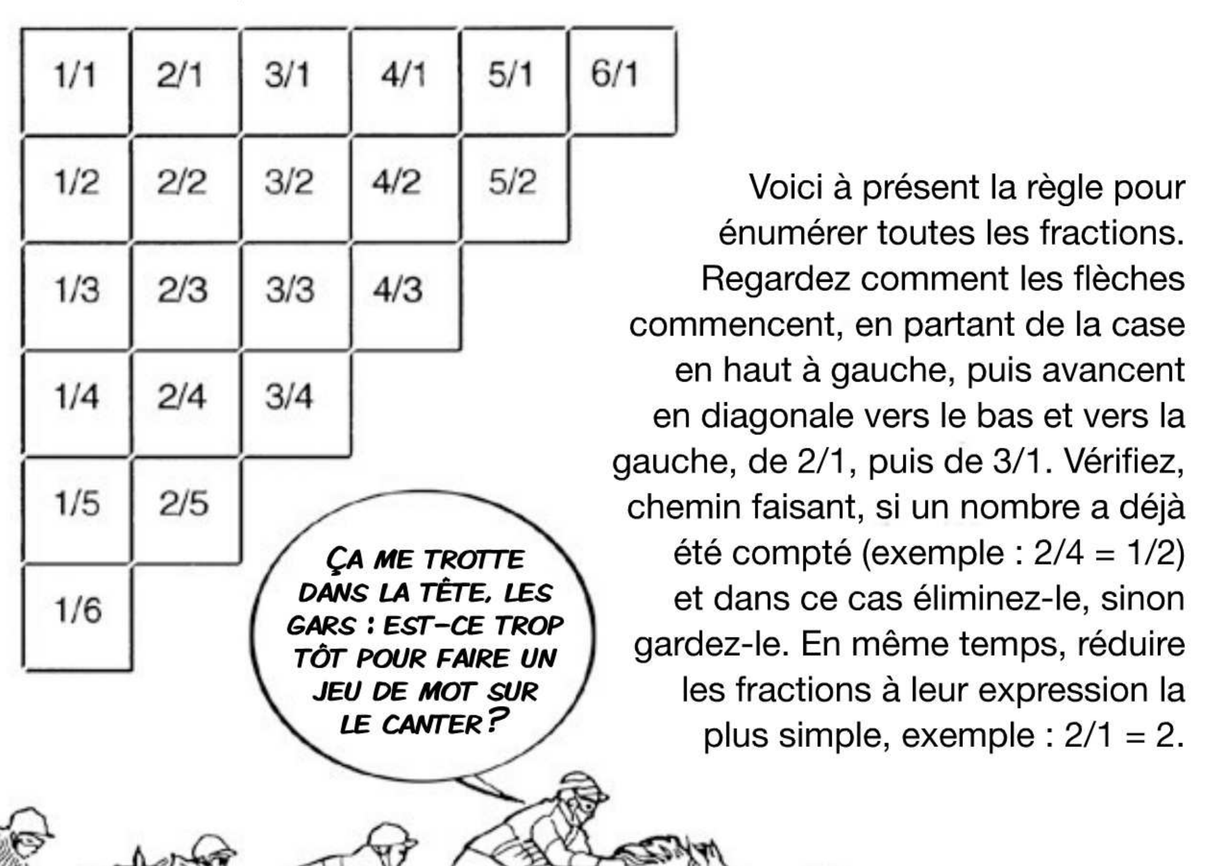
Cantor et les ensembles

Pendant que certains se souciaient d'opérations avec les nombres, d'autres s'interrogeaient sur la notion d'infini. Des ensembles réellement infinis étaient livrés aux spéculateurs, aux mathématiciens et aux mystiques. Le mathématicien allemand **George Cantor** (1845–1918) s'est courageusement donné comme but de « dompter l'infini ».

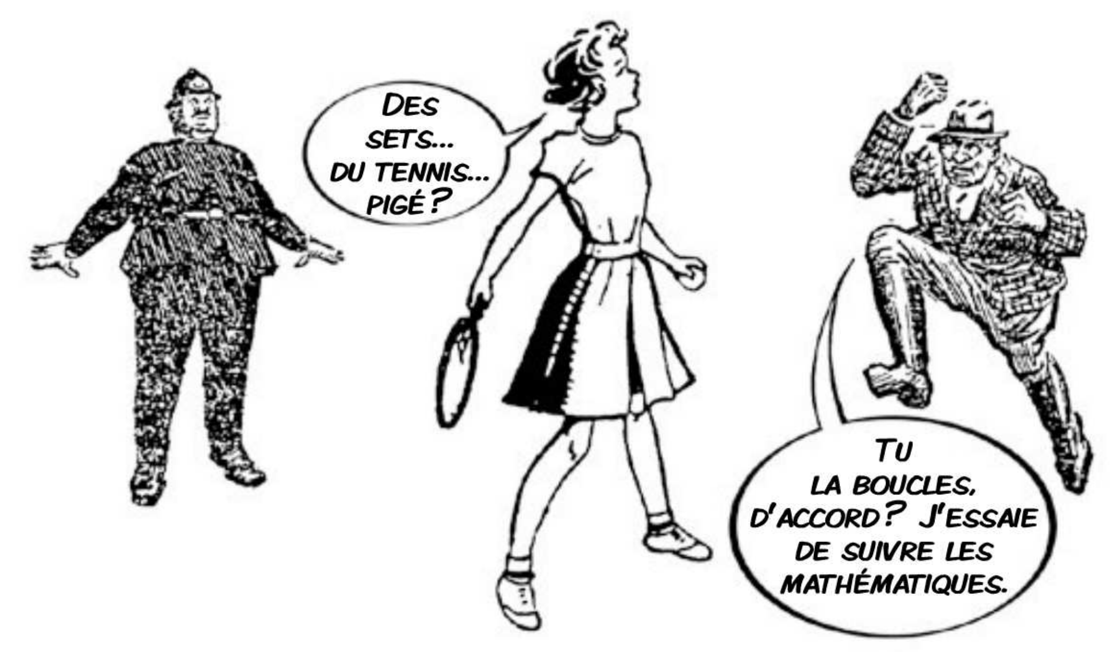


Cantor a donné une méthode pour compter tous les nombres fractionnaires, dans un schéma comme celui-ci :

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	
1/3	2/3	3/3	4/3		
1/4	2/4	3/4			
1/5	2/5				
1/6					



Voici à présent la règle pour énumérer toutes les fractions. Regardez comment les flèches commencent, en partant de la case en haut à gauche, puis avancent en diagonale vers le bas et vers la gauche, de 2/1, puis de 3/1. Vérifiez, chemin faisant, si un nombre a déjà été compté (exemple : 2/4 = 1/2) et dans ce cas éliminez-le, sinon gardez-le. En même temps, réduire les fractions à leur expression la plus simple, exemple : 2/1 = 2.



Nous avons alors la séquence :

1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 5…

Vous pouvez constater que c'est la même chose que de regarder toutes les fractions (y compris les entiers) dont le numérateur et le dénominateur forment un total de 2, puis de 3, puis de 4… et en commençant par le plus grand numérateur à chaque fois. On atteindra n'importe quel nombre, n'importe quel entier, n'importe quelle fraction à plus ou moins longue échéance.

De même, tous les nombres qui sont des solutions à des équations algébriques, tels que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{(-1)}$, peuvent être énumérés.

En réalité, les travaux de Cantor, ont démontré exactement le contraire de ce qu'il voulait. Ainsi, il a découvert que l'ensemble comprenant tous les « nombres réels », les points sur une ligne, ne peut être énuméré. Sa preuve tient en quelques lignes seulement, mais vous devez y prêter attention.

Supposons que tous les nombres ont été justement énumérés, comme les fractions ou les nombres algébriques. Nous aurons donc une longue liste, infiniment longue comme celle que nous avons construite précédemment. Et, tout comme pour les fractions, les nombres inscrits sur la liste ne se suivent pas par ordre de taille.

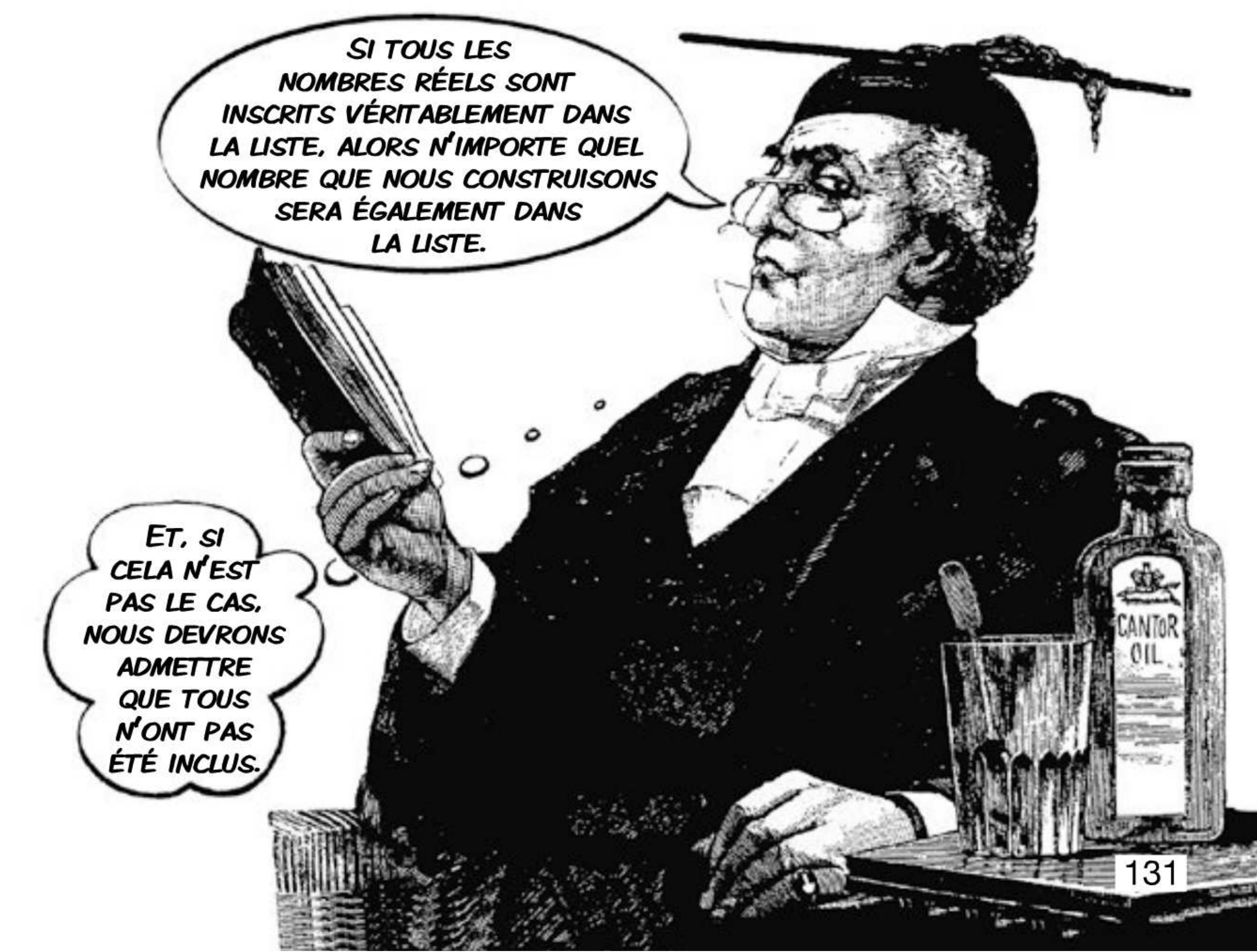
Pour rester simple, prenons tous les nombres réels entre 0 et 1, avec leurs expansions décimales. La liste pourrait avoir l'allure suivante :

N_1 = 0,716 693 2…
N_2 = 0,422 589 6…
N_3 = 0,779 641 9…
N_4 = 0,322 895 2…

LES NOMBRES DONNÉS ICI SONT CHOISIS DE MANIÈRE ARBITRAIRE !

Les « trois points » après la section décimale signifient, par convention, que la série continue indéfiniment.

Les « trois points » inscrits à la suite de N_4 signifient que la série de nombres N_x également s'étend indéfiniment.





Alors comment est-il possible de construire un nombre qui ne figure pas sur la liste ? Nous devrions d'abord supposer que nous en possédons un qui soit différent du premier nombre à la première place, différent du second nombre à la deuxième place, et ainsi de suite. Nous pouvons construire un tel nombre en plaçant le chiffre de chaque place à une place plus loin que celui de la liste.

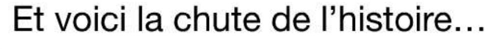


1re place :	7 → 8
2de place :	2 → 3
3e place :	9 → 0
4e place :	8 → 9
....	

Comme vous pouvez le constater, les nombres choisis n'ont strictement aucune importance en soi. Ils pourraient être tout autres.

Aussi, le nouveau nombre, que nous pouvons appeler « étrange », est (pour la liste ci-contre) :

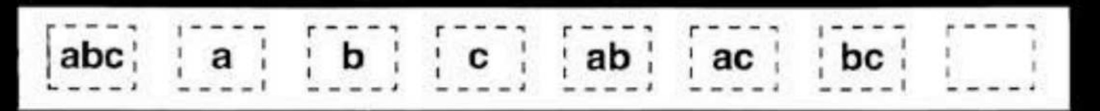
S = 0,830 9…



Et voici la chute de l'histoire…

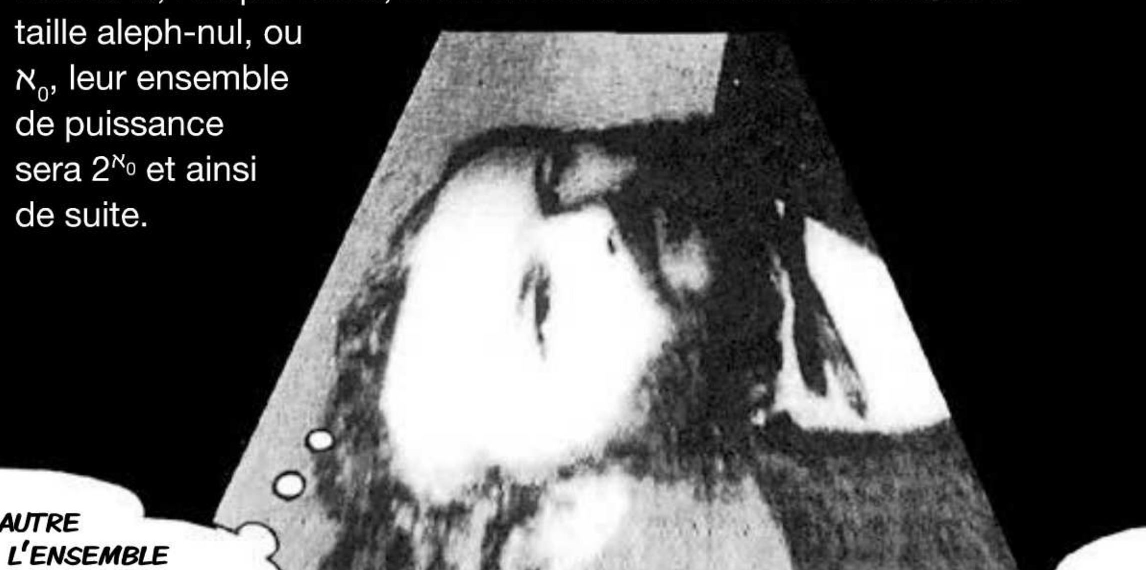


Cantor a étudié deux niveaux de l'infini : les «numérables» (comme les nombres habituels) et les points sur une ligne. Mais comment les relier ? Il a développé ensuite une méthode pour générer et décrire des ordres d'infini plus élevés ! Pour ce faire, il est passé par la notion de «sous-ensembles». Si nous avons un ensemble de trois éléments – a, b et c –, les sous-ensembles sont les paires ab, ac et bc, les éléments simples a,b et c plus (toujours par convention) l'ensemble «vide» (qui ne contient aucun élément) et l'ensemble des trois.



Si on les comptabilise, on s'aperçoit que le total des éléments est 8, soit 2^3. Ce nouvel ensemble s'appelle **l'ensemble de puissance** de l'ensemble initial. Et si l'original possède N éléments, l'ensemble de puissance aura 2^N éléments.

À présent, Cantor avait la possibilité de générer des ensembles sans cesse plus grands, simplement en créant des ensembles de puissance. Il a ainsi proposé un nouveau symbole pour désigner la taille de ces ensembles. Juif d'origine, il a adopté la première lettre de l'alphabet hébreu ℵ, l'aleph. Donc, si les ensembles numérables sont de la taille aleph-nul, ou $\aleph_0$, leur ensemble de puissance sera $2^{\aleph_0}$ et ainsi de suite.



IMPOSSIBLE

ERRER DANS DES INFINIS ÉTAIT PLUTÔT EXCITANT, VOIRE DÉROUTANT ; MAIS ÇA, C'ÉTAIT AVANT LE DÉSASTRE !

La raison en est que quand quelqu'un parle d'ensembles en termes aussi généraux, rien n'empêche alors un tiers d'invoquer un « ensemble de tous les ensembles » ; après tout, ça « tient » grammaticalement, n'est-ce pas ? Ce dernier ensemble doit être le plus grand ensemble possible, et sa taille aura un certain aleph, disons $\aleph_F$. Et, comme tout autre ensemble, il aura un ensemble de puissance, dont le nombre sera défini ainsi $2^{\aleph_F}$

qui, de toute évidence, sera plus grand que $\aleph_F$. Ainsi, ce que nous avions défini comme le plus grand des ensembles, l'ensemble de tous les ensembles, peut générer un ensemble encore plus grand. Une idée qui se contredit, manifestement.



La crise des mathématiques

Les paradoxes de l'infini découverts par Cantor présentaient une nouvelle catégorie de défi pour les mathématiciens. Il ne s'agissait plus de cas où l'objet mathématique semblait aller à l'encontre de l'intuition, comme $\sqrt{-1}$ ou dx/dt. Ce sont plutôt des objets clairement contradictoires. Et pourtant, ils nous viennent d'arguments qui ne sont pas différents de ceux que l'on trouve dans les mathématiques classiques.



Au début du XXe siècle, une armée de philosophes et de mathématiciens se sont déterminés à résoudre la crise.

Russel et la vérité mathématique

Parmi ceux déterminés à résoudre la crise se trouvait **Bertrand Russel** (1872–1970). Sa longue carrière a embrassé la logique, la philosophie, l'éducation d'avant-garde et enfin la désobéissance civile, tant il était contre les armes nucléaires. Pour lui, les mathématiques représentaient la seule vérité vérifiable dans le monde, s'opposant aux revendications largement infondées de la religion.

J'AI ÉTUDIÉ (AVEC D'AUTRES) LES PARADOXES DE LA LOGIQUE, À LA RECHERCHE D'INDICES DE CE QUI N'ALLAIT PAS DANS LES ANALYSES DE CANTOR.

Certains paradoxes étaient connus déjà au temps des anciens Grecs. Par exemple, certaines affirmations dépendaient du sens précis à donner à « tous », comme dans « l'ensemble de tous les ensembles ».





L'un des paradoxes des plus ingénieux concerne le « nommage ». Définissons B comme « le plus faible des entiers non nommables en moins de 19 syllabes ». D'une manière ordinaire, ce serait un nombre plutôt grand qui aurait besoin de 19 syllabes. Par exemple : « sept cent mille millions de milliards » ne requiert que 9 syllabes.



Ce paradoxe est très sérieux, car il n'implique ni autoréférencement ni universalité. Il démontre à quel point il est difficile de secourir la certitude en mathématiques en procédant à un nettoyage des fondations.

La campagne a été finalement abandonnée, y compris par Russel.







Une preuve deviendrait un ensemble de lignes de symboles, lesquels sont reliés les uns aux autres par des règles de transformation. La tâche consistait à montrer que des preuves « valides » se distingueraient des invalides, de sorte que n'importe quelle affirmation mathématique peut être démontrée comme étant soit VRAIE soit FAUSSE.

Le théorème de Gödel

Kurt Gödel (1906–1978) a publié son théorème en 1931 en réponse à **A. N. Whitehead** (1861–1947) et les travaux cosignés sous le titre *Principia Mathematica* (en trois tomes ; 1910–1913) avec Bertrand Russel sur la logique symbolique.

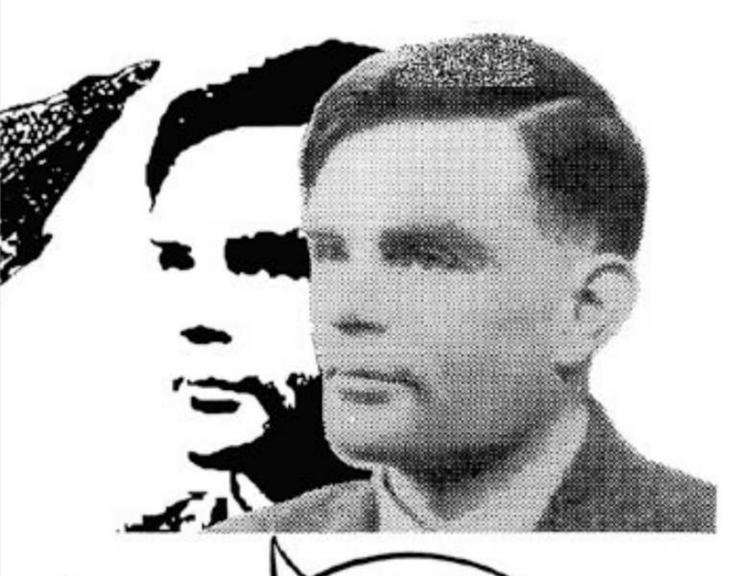


Son astuce était de faire un nouvel usage des nombres. Il a attribué un nombre à chaque partie d'une affirmation mathématique, puis il les a combinés pour donner un nombre unique à chaque affirmation. Ensuite, se servant d'un argument qui rappelle l'approche de Cantor, il a produit un nombre monstrueusement grand, représentant une affirmation unique parfaitement claire mais qui ne pouvait être validée ou invalidée, dans un sens ou l'autre.



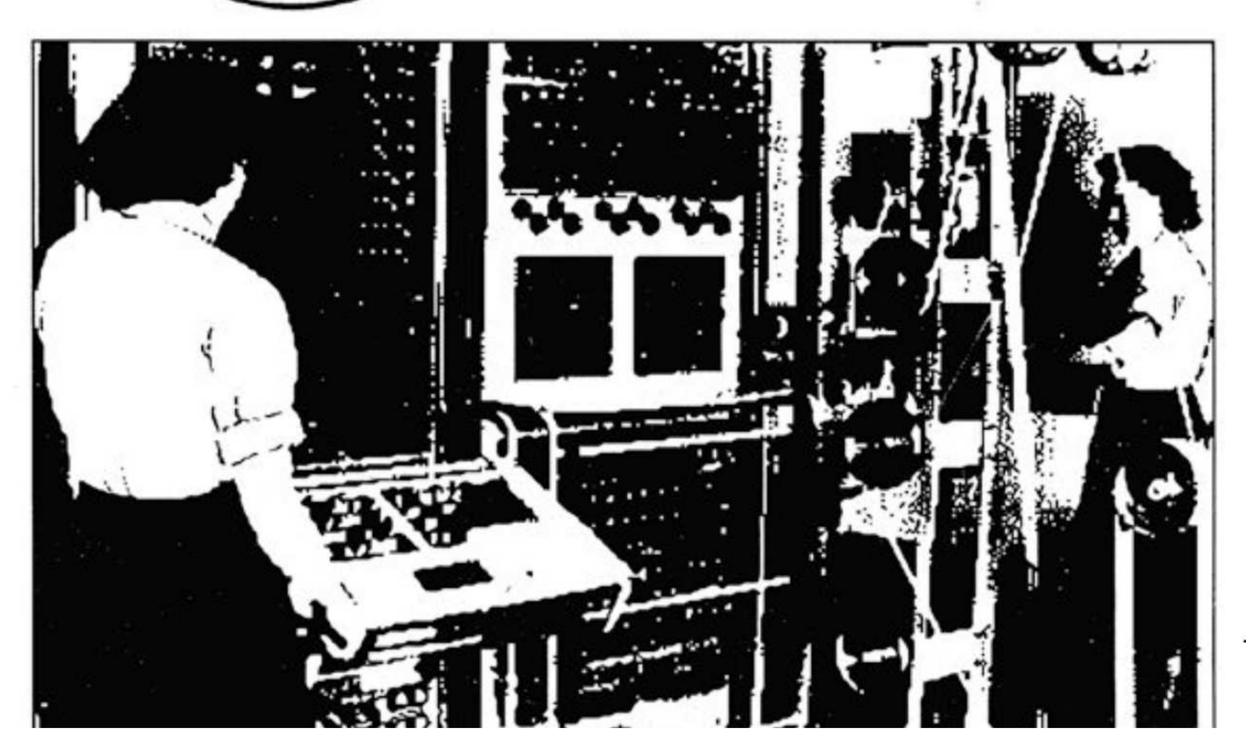
La machine de Turing

Une forme de force différente est venue de la « magnifique destruction » induite par les travaux de Gödel, car un certain **Alan Turing** (1912–1954) a bien émis l'idée que l'on pouvait générer des affirmations mathématiques de manière totalement abstraite.

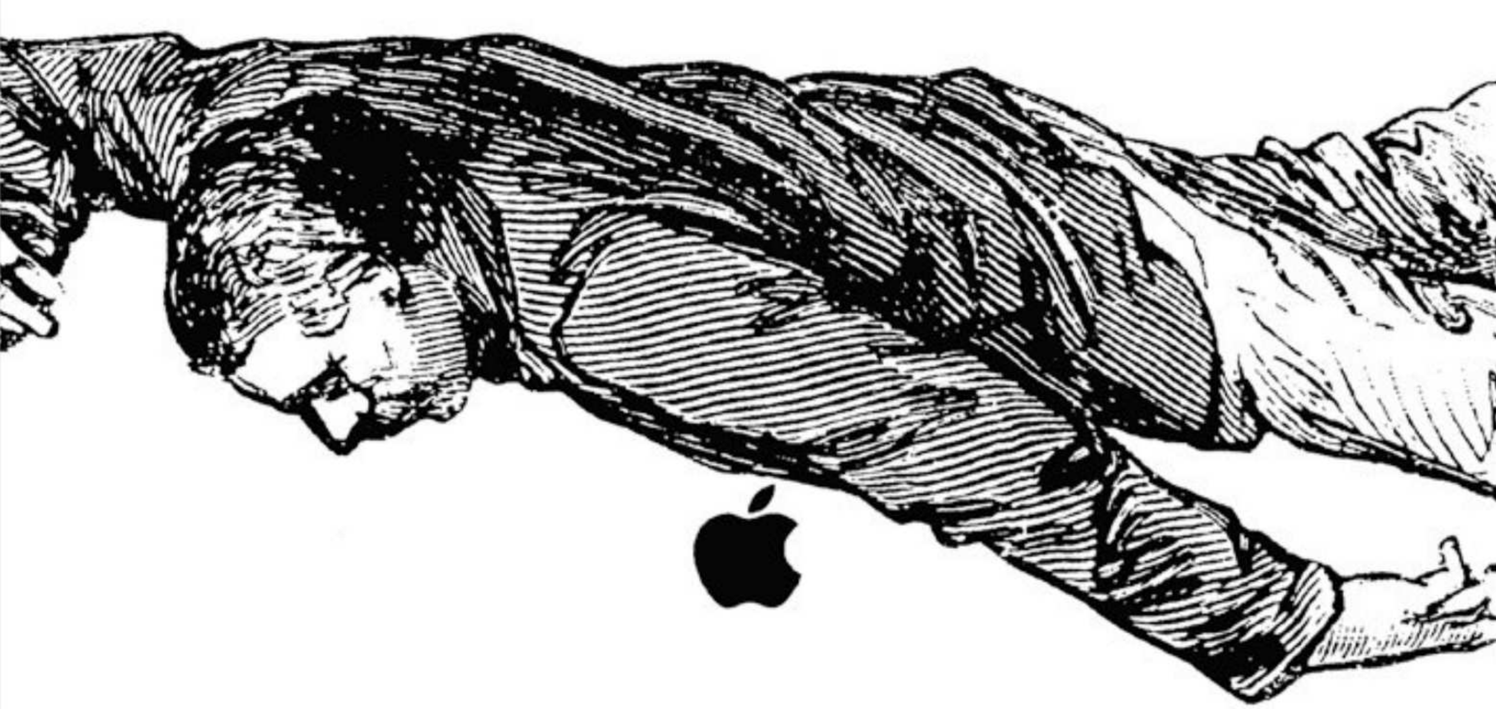


Une « machine de Turing » comprenait une bande perforée et un programme qui réagissait (obéissait) à des informations inscrites dans chaque segment de la bande ; la machine exécutait alors les opérations les plus élémentaires. Étant donné le niveau de technologie dans les années 1930, son concept n'a strictement aucune utilité pratique. Toutefois, cela a fourni à Turing une version des méthodes de Gödel dont il avait besoin pour mener à bien ses recherches.

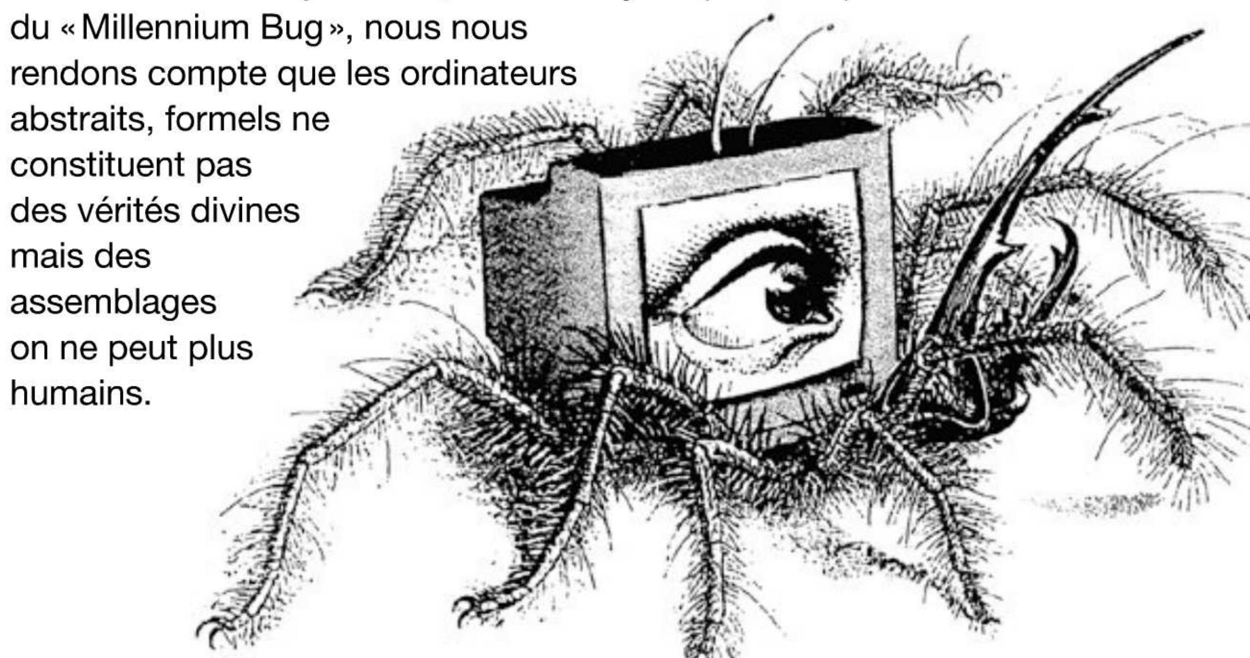
Bientôt, ses recherches sont devenues très utiles, car elles guidaient le développement des ordinateurs pendant la Seconde Guerre mondiale. Au début, il s'agissait de machines à calculer énormes, avec un programme externe (contrôlé par des boutons et des interrupteurs). Le grand changement consistait à intégrer le programme *dans* la machine, sous la forme d'un fichier à part, celui qui commande et dirige la succession d'opérations à mettre en œuvre. Il n'y avait donc plus de limitation à sa complexité ni à son adaptabilité.



Turing a même contribué à gagner la guerre, en tant que membre de l'équipe qui a « cassé » le système de codage de la machine à chiffrement/déchiffrement Enigma des Allemands. Mais il est décédé tragiquement, sans nul doute en succombant aux persécutions (et même inculpations) car il était homosexuel. Il est mort d'empoisonnement au cyanure et on a trouvé à côté de son corps sans vie une pomme imprégnée du poison mortel, qu'il avait visiblement croquée.



La vision de Turing (pouvoir créer un ordinateur abstrait) est devenue illusoire à la longue. Dans son schéma pour effectuer des opérations simples, il n'y avait pas de place pour des erreurs de programmation, et pas « besoin » de déboguer non plus. Pendant des décennies, on a estimé les ordinateurs infaillibles ; les erreurs quelles qu'elles soient étaient nécessairement humaines. Mais aujourd'hui, avec la frayeur (infondée) du « Millennium Bug », nous nous rendons compte que les ordinateurs abstraits, formels ne constituent pas des vérités divines mais des assemblages on ne peut plus humains.



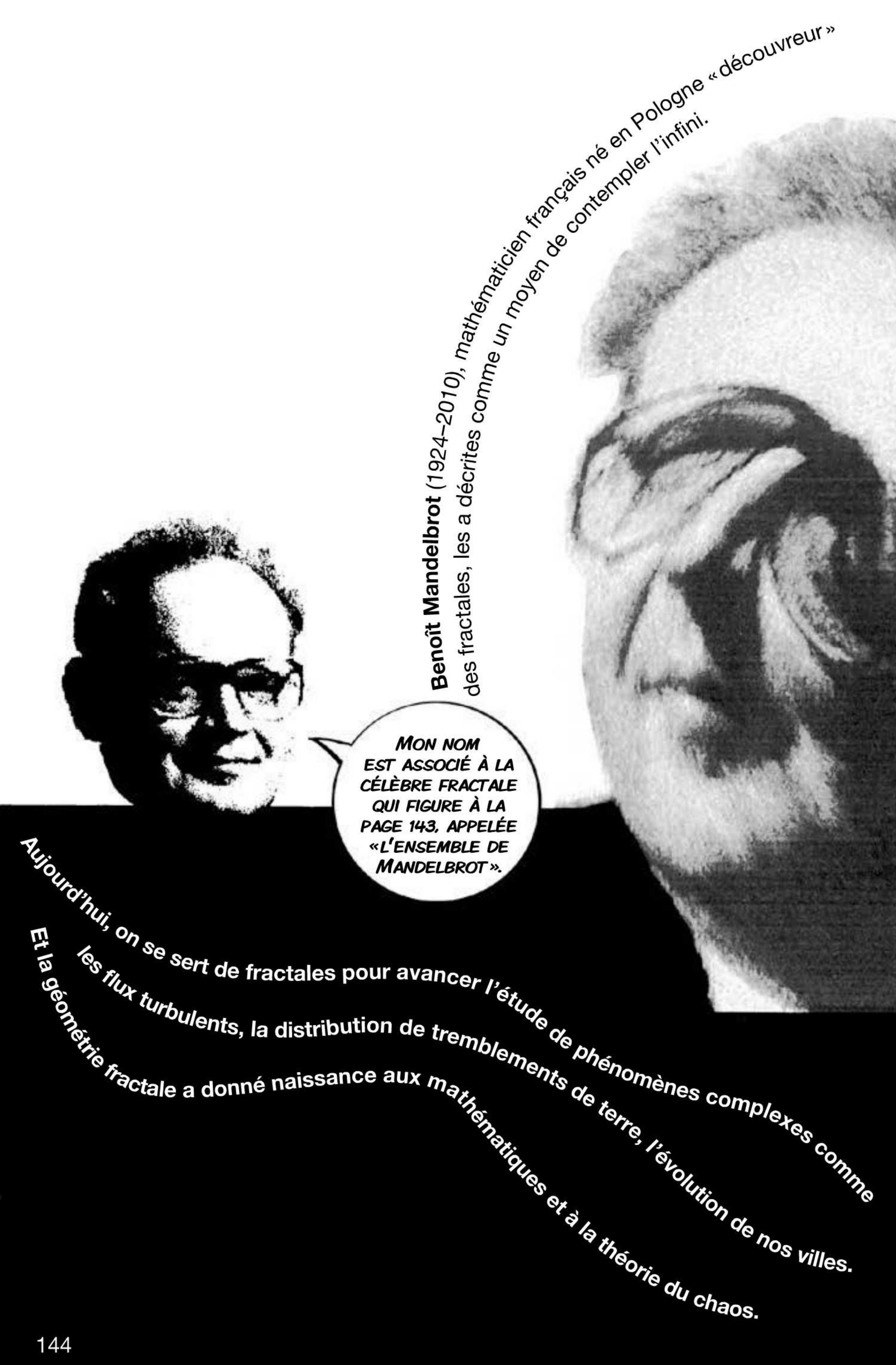


Les fractales

La puissance de calcul installée désormais dans nos ordinateurs a des effets sur les mathématiques. Les systèmes graphiques des ordinateurs a donné naissance, entre autres, à une nouvelle forme de géométrie, celle des **fractales**, comprenant des formes irrégulières mais particulières. Elles sont, comme on dit, « similaires entre elles », ce qui signifie que n'importe quel sous-système d'un ensemble de fractales est l'équivalent du système entier.

Les fractales sont de belles constructions étonnantes, à la fois très complexes et particulièrement simples. Complexes, en raison de leurs infinis détails et de leurs propriétés mathématiques uniques (aucune fractale ne ressemble à une autre) ; simples, car résultant d'opérations particulièrement simples.

Nous commençons avec une équation simple de la forme $x^2 + y$ où x est un nombre complexe variable et y un nombre complexe fixe. Nous choisissons deux nombres complexes et indiquons à l'ordinateur de procéder à leur addition et de substituer ce résultat à la valeur initiale de x, et ainsi de suite. Le résultat, graphiquement, est spectaculaire.

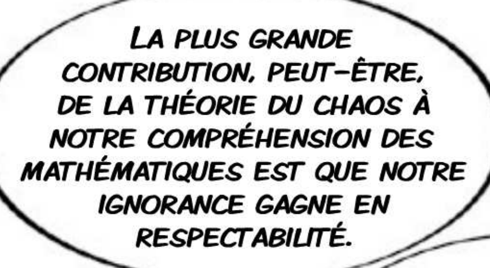

Benoît Mandelbrot (1924–2010), mathématicien français né en Pologne « découvreur » des fractales, les a décrites comme un moyen de contempler l'infini.
MON NOM EST ASSOCIÉ À LA CÉLÈBRE FRACTALE QUI FIGURE À LA PAGE 143, APPELÉE «L'ENSEMBLE DE MANDELBROT».
Aujourd'hui, on se sert de fractales pour avancer l'étude de phénomènes complexes comme les flux turbulents, la distribution de tremblements de terre, l'évolution de nos villes.
Et la géométrie fractale a donné naissance aux mathématiques et à la théorie du chaos.

La théorie du chaos

La théorie du chaos décrit des phénomènes qui ne sont pas aléatoires, décrits par des équations différentielles et qui ne sont pas, de plus, prévisibles. La raison en est que de minuscules changements au niveau des conditions initiales peuvent induire de grands changements au niveau des solutions. L'affirmation la mieux connue (un peu exagérée, soit dit en passant) est :



Un comportement chaotique est fortement lié à la propriété fractale des systèmes. Ils sont « auto-similaires », de sorte qu'en changeant l'échelle à laquelle le comportement est décrit, nous avons toujours les mêmes formes de variabilité. Des phénomènes apparemment aléatoires, comme les changements des prix affichés à la bourse, possèdent cette propriété auto-similaire. C'est cela qui rend possible l'utilisation de la théorie du chaos pour gérer des portefeuilles d'actions.

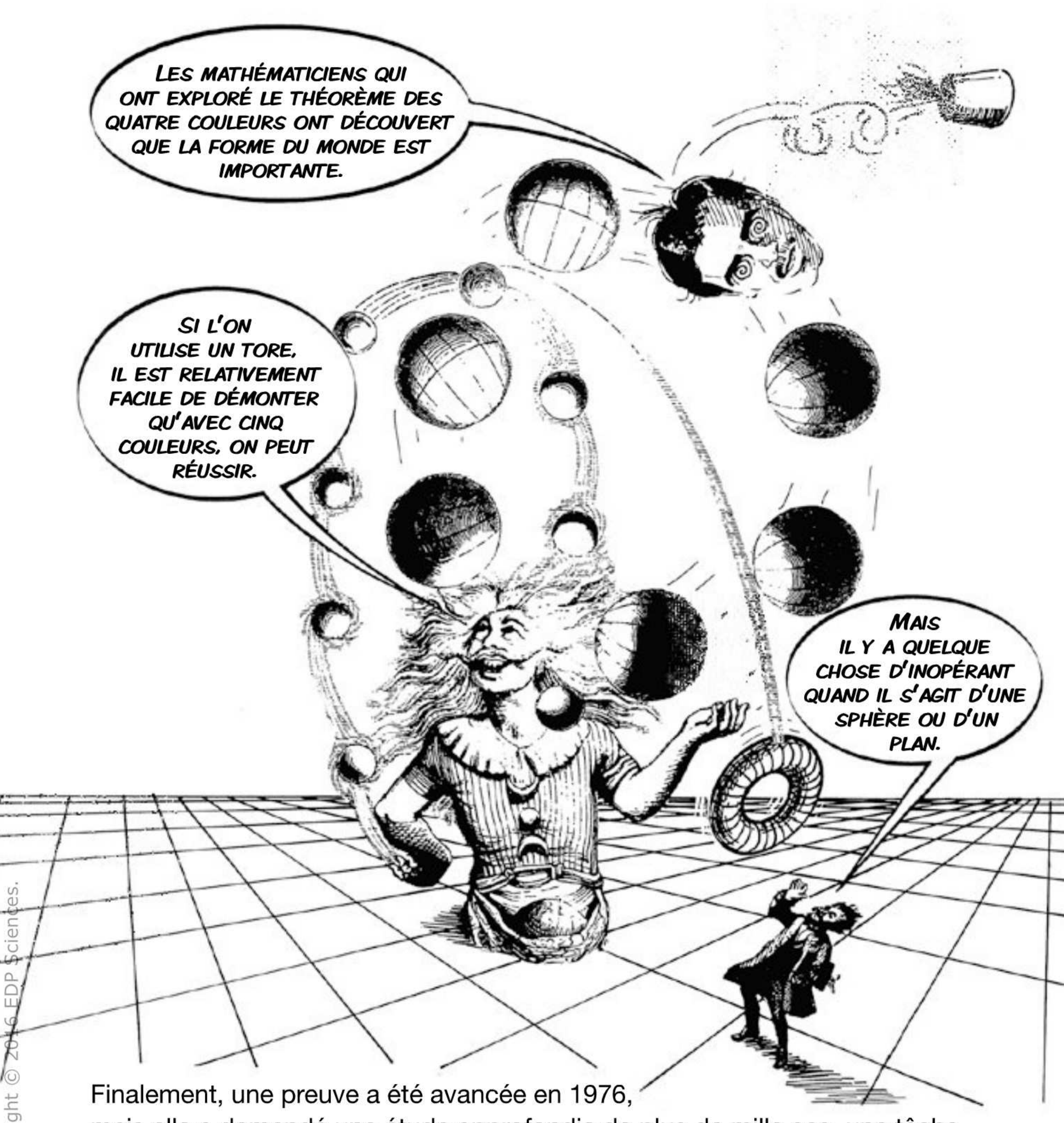

LA PLUS GRANDE CONTRIBUTION, PEUT-ÊTRE, DE LA THÉORIE DU CHAOS À NOTRE COMPRÉHENSION DES MATHÉMATIQUES EST QUE NOTRE IGNORANCE GAGNE EN RESPECTABILITÉ.
ELLE A FOURNI AUX MATHÉMATICIENS CERTAINS PROBLÈMES AYANT TRAIT À L'IMPOSSIBILITÉ D'ATTEINDRE UNE CONNAISSANCE DÉTAILLÉE.
LA PREMIÈRE FOIS QUE LES QUESTIONS DE LA CERTITUDE EN MATHÉMATIQUES ONT ÉTÉ FINALEMENT CERNÉES, AU MOMENT DE LA DÉCOUVERTE DES PARADOXES DE L'INFINI AU DÉBUT DU XXe SIÈCLE, UN SENTIMENT DE « CRISE FONDAMENTALE » EST NÉ.


CETTE FOIS, CELA FAIT PARTIE DU PROGRÈS ; ET, DANS CE SENS, ELLE REFLÈTE LA CONTINUITÉ DU CHANGEMENT DE NOTRE PERCEPTION DE LA NATURE DES MATHÉMATIQUES.

La topologie

La puissance des ordinateurs agit sur les mathématiques d'autres façons plus significatives. Les ordinateurs ont fourni des preuves là où le cerveau humain n'était pas suffisant. Le cas le plus marquant est l'avènement de la topologie. Il s'agit d'une discipline qui étudie les rapports entre structures, indépendamment de leurs formes précises. On peut également évoquer le champ mathématique le plus simple, s'agissant de formuler les problèmes, mais aussi le plus difficile, s'agissant d'y trouver des solutions.

L'un des plus beaux défis s'appelle le théorème des quatre couleurs, qui énonce que n'importe quelle carte peut être dressée avec au maximum quatre couleurs. La seule règle est que deux pays ayant une frontière commune ne peuvent pas avoir la même couleur. Si la « rencontre » se fait en un seul point, c'est admis, autrement, la carte peut avoir la forme d'un « camembert » avec autant de segments que l'on désire et donc autant de couleurs. La seule limite est que chaque « pays » est un territoire uni et ne peut héberger une « île » (comme l'exemple de l'Italie et de la Suisse près de Lugano).

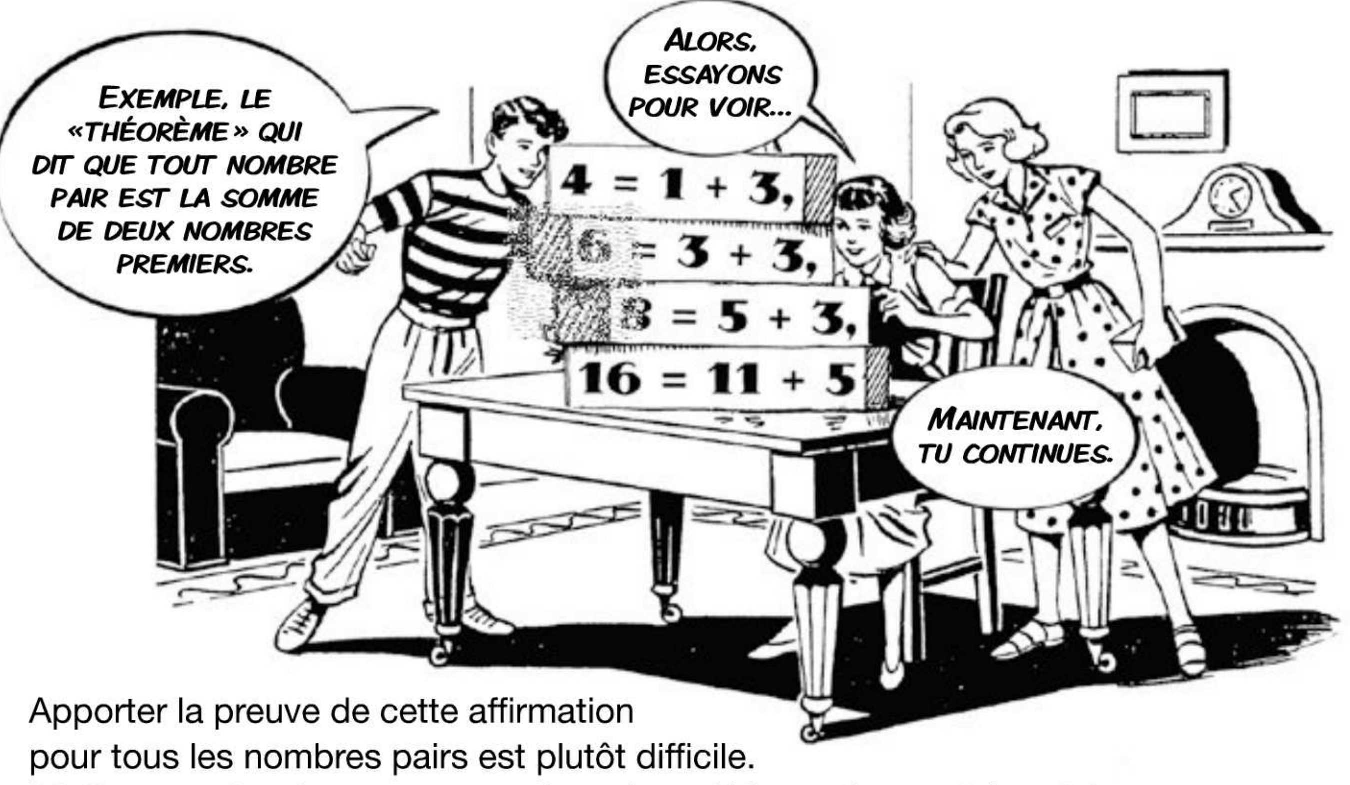


Finalement, une preuve a été avancée en 1976, mais elle a demandé une étude approfondie de plus de mille cas, une tâche qui dépassait de loin la capacité des Hommes. Pour ce faire donc, un programme pour ordinateur a été spécialement mis au point afin de tester chaque cas, l'un après l'autre : cela a marché et a donné le résultat espéré.

Mais d'autres mathématiciens se sont plaints que cette preuve ne pouvait pas être validée. La raison en est qu'un programme d'ordinateur n'est jamais qu'une liste d'instructions successives et non une séquence d'affirmations logiques entre elles. Comment pouvons-nous alors savoir qu'un programme en particulier (à la différence d'autres) a été débogué totalement ? À la fin, une sorte de consensus s'est imposé et la preuve est aujourd'hui acceptée comme « vérifiée ».

La théorie des nombres

Comme pour la topologie, les problèmes de la théorie des nombres sont faciles à décrire mais difficiles à résoudre.



Apporter la preuve de cette affirmation pour tous les nombres pairs est plutôt difficile. D'ailleurs, cela a longtemps représenté un défi pour les mathématiciens. La première tentative couronnée de succès porte le nom de «conjecture de Goldbach»; elle a démontré que pas plus de 400 000 nombres premiers sont nécessaires.



Le plus célèbre des théorèmes dans le domaine des nombres est celui que nous devons au mathématicien français **Pierre de Fermat** (1601–1665).



$a^2 + b^2 = c^2$

où a, b et c sont des nombres entiers. La construction de tels triplets est connue depuis des siècles.

Nous avons déjà vu que les mathématiciens arabes avaient réfléchi à la même équation avec des puissances plus élevées ; certains ont essayé de vérifier l'impossibilité de trouver une solution en nombres entiers à :

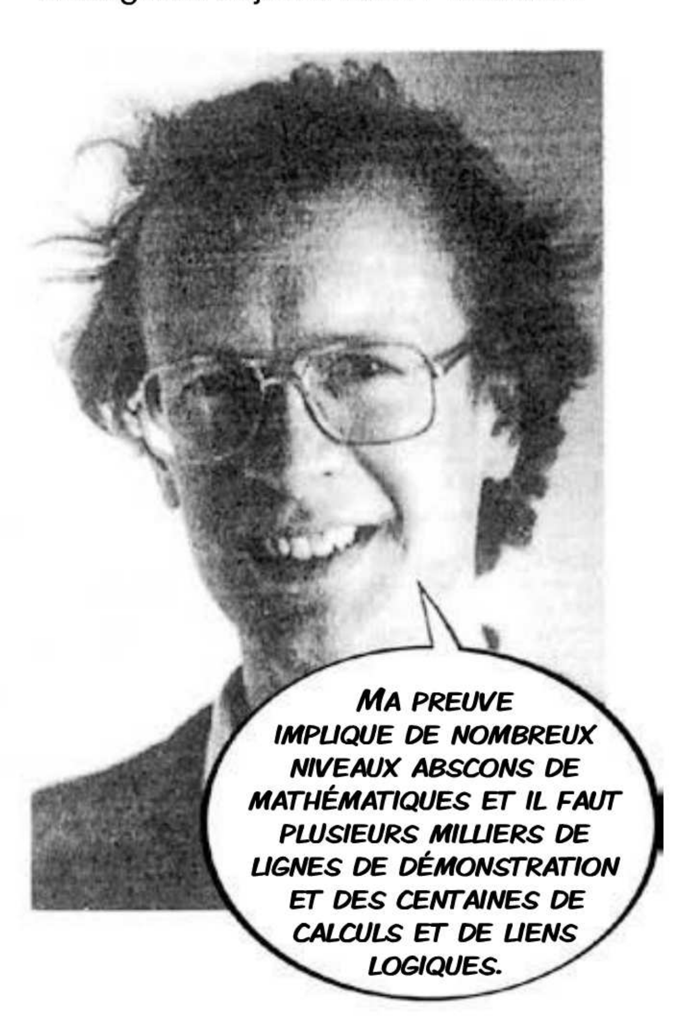
$x^3 + y^3 = z^3$

Mais Pierre de Fermat pensait y être parvenu, affirmant que pour l'équation…

$x^n + y^n = z^n$

il n'existait aucune solution de nombres premiers pour n supérieur à 2.

Il a même écrit à un ami qu'il avait une « jolie petite preuve » qui ne tenait pas dans l'étroite marge de sa feuille ! C'est ainsi qu'a commencé la course, qui s'est poursuivie trois siècles durant jusqu'à la preuve proposée par le mathématicien britannique **Andrew Wiles** (1953–), enseignant aujourd'hui à Princeton.



Mais démonstration est faite que l'esprit humain arrive encore à résoudre des problèmes là où les ordinateurs échouent !

Il s'avère que la théorie des nombres, traditionnellement, a été l'une des branches les moins « applicables » des mathématiques. Mais avec les progrès enregistrés dans certains champs, on voit parfois des interactions étonnantes.

LA CRYPTOGRAPHIE (SCIENCE VOIRE ART DE CRÉER DES MESSAGES CODÉS) A TOUJOURS INTÉRESSÉ LES MILITAIRES ET LES ESPIONS.

Mais, avec le besoin croissant de pouvoir transmettre et de recevoir ces messages sûrs *via* Internet, ce secteur a soudain revêtu une grande importance commerciale, technologique et politique. La « sécurité » des échanges dépend totalement de la difficulté de craquer (déchiffrer) les codes de cryptage.



IL FAUT FAIRE QUELQUE CHOSE.

Le meilleur moyen de créer un bon codage est de passer par de très grands nombres, tels que leur « construction » ne soit pas facile à calculer. La définition de tels nombres et leur construction-déconstruction font appel à la théorie des nombres et à celle des groupes. Et c'est ainsi que la plus abstraite des disciplines mathématiques se trouve aux avant-postes des applications. Dans la mesure où les gouvernements sont très attentifs à la capacité de leurs services à intercepter et à déchiffrer des messages émanant potentiellement de criminels et/ou de terroristes, le problème du « chiffre » est devenu aussi hautement politique.

Les statistiques

Le domaine où les mathématiques ont le plus d'impact sur la vie de tous les jours est celui des statistiques. Le terme « statistique » lui-même signifie « connaissance de l'état », dans la mesure où nos gouvernants se sont rendu compte qu'ils seraient bien plus efficaces s'ils disposaient d'informations sur ce qui se passe réellement. Mais, amasser d'énormes masses de nombres ne suffit évidemment pas ; ces nombres doivent être « agrégés » et synthétisés pour être utiles aux décideurs.

Dans ce travail, on se sert des mesures statistiques pour établir des « moyennes ». Cependant, une moyenne n'est jamais qu'une représentation d'un groupe et, tout en révélant et en clarifiant une situation donnée, ces valeurs moyennées peuvent aussi servir à masquer, voire à effacer une réalité.

Pour illustrer notre propos, imaginons un village où

100 paysans gagnent péniblement 100 €/an

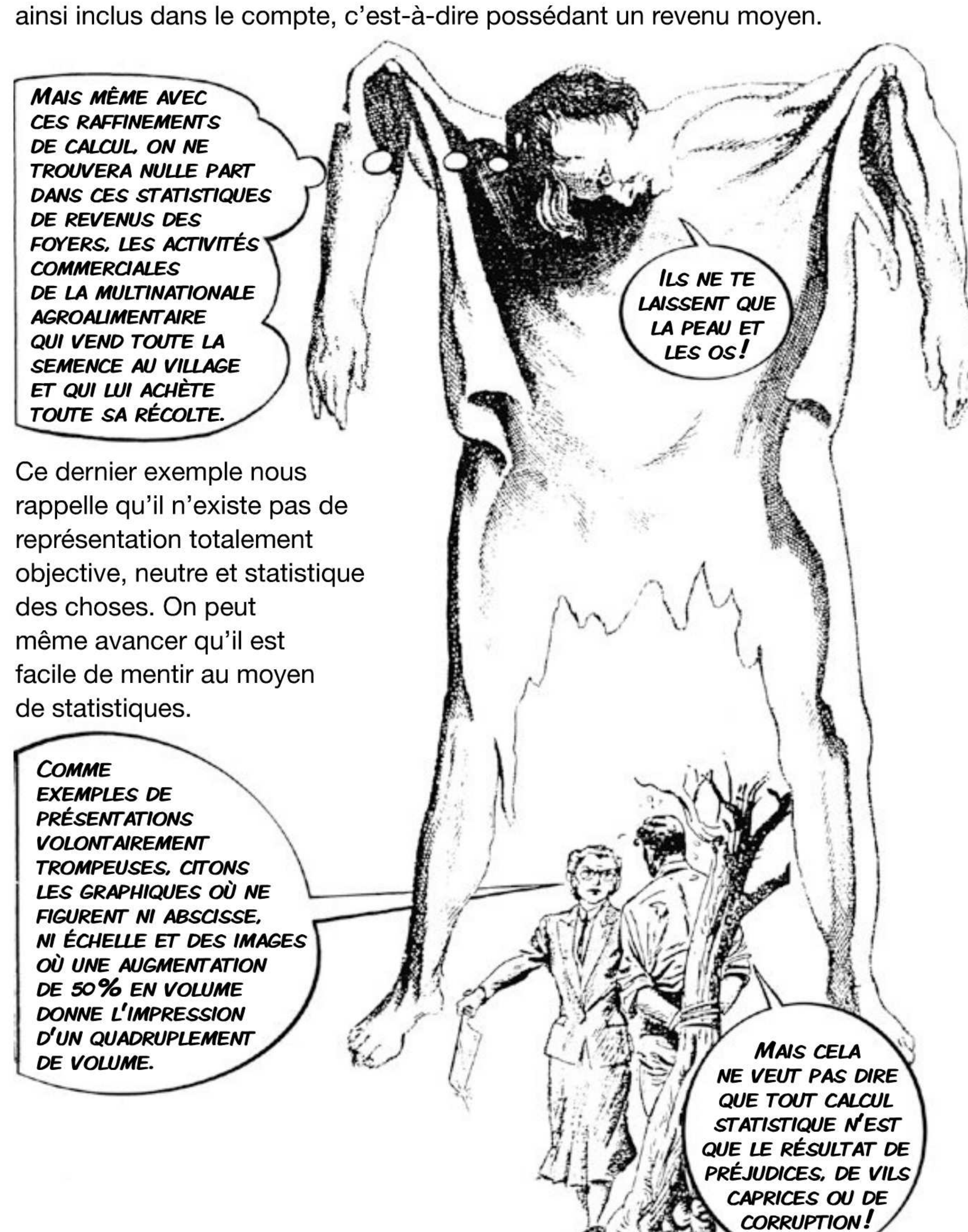
10 agriculteurs gagnent facilement 1 000 €/an

et un propriétaire terrien amasse tout seul 10 000 €/an



Le revenu global annuel du village est donc de 30 000 €, ce qui, divisé par les 111 foyers fiscaux, donne une moyenne modeste de 270 €/an.

Et si au lieu de la valeur moyenne, nous pouvions nous focaliser sur la valeur « médiane » (où seuls 50 % dépassent cette valeur) ou sur la valeur « modale » (le revenu détenu par la majorité)… Dans ces deux calculs, nous aurions le même résultat, à savoir 100 €, valeur qui ne tient pas compte des plus fortunés du village. Aussi, pour avoir une meilleure « image » de la distribution des revenus du village, nous pourrions citer les déciles les plus hauts et les plus bas (aux niveaux 10 % et 90 %) ; le 11e foyer (en partant du haut) serait ainsi inclus dans le compte, c'est-à-dire possédant un revenu moyen.



Ce dernier exemple nous rappelle qu'il n'existe pas de représentation totalement objective, neutre et statistique des choses. On peut même avancer qu'il est facile de mentir au moyen de statistiques.

Les valeurs-p et les valeurs hors échelle

Dans tous les tests statistiques de vraisemblance, un nombre désigne ce que l'on appelle « la limite de confiance », autrement dit la « valeur-p » des calculs. Ce nombre peut être de 5 % ou de 1 % (ou autre, disons 95 % ou 99 %). *Grosso modo*, la valeur-p indique le degré de confiance (ou non) qu'il convient d'accorder aux valeurs obtenues par le test. Il exprime par un rapport {20 contre 1 ou 100 contre 1 (100 %)} les chances que le test ait donné un résultat faux vrai. Aucun test ne donne de résultats 100 % certains ou parfaits ! Plus haute est la certitude requise, plus le test va coûter cher à mettre en œuvre. Ainsi, ceux qui fixent les normes relatives à un champ d'application donné auront au préalable décidé quel est le niveau de risque acceptable associé à toute erreur possible.



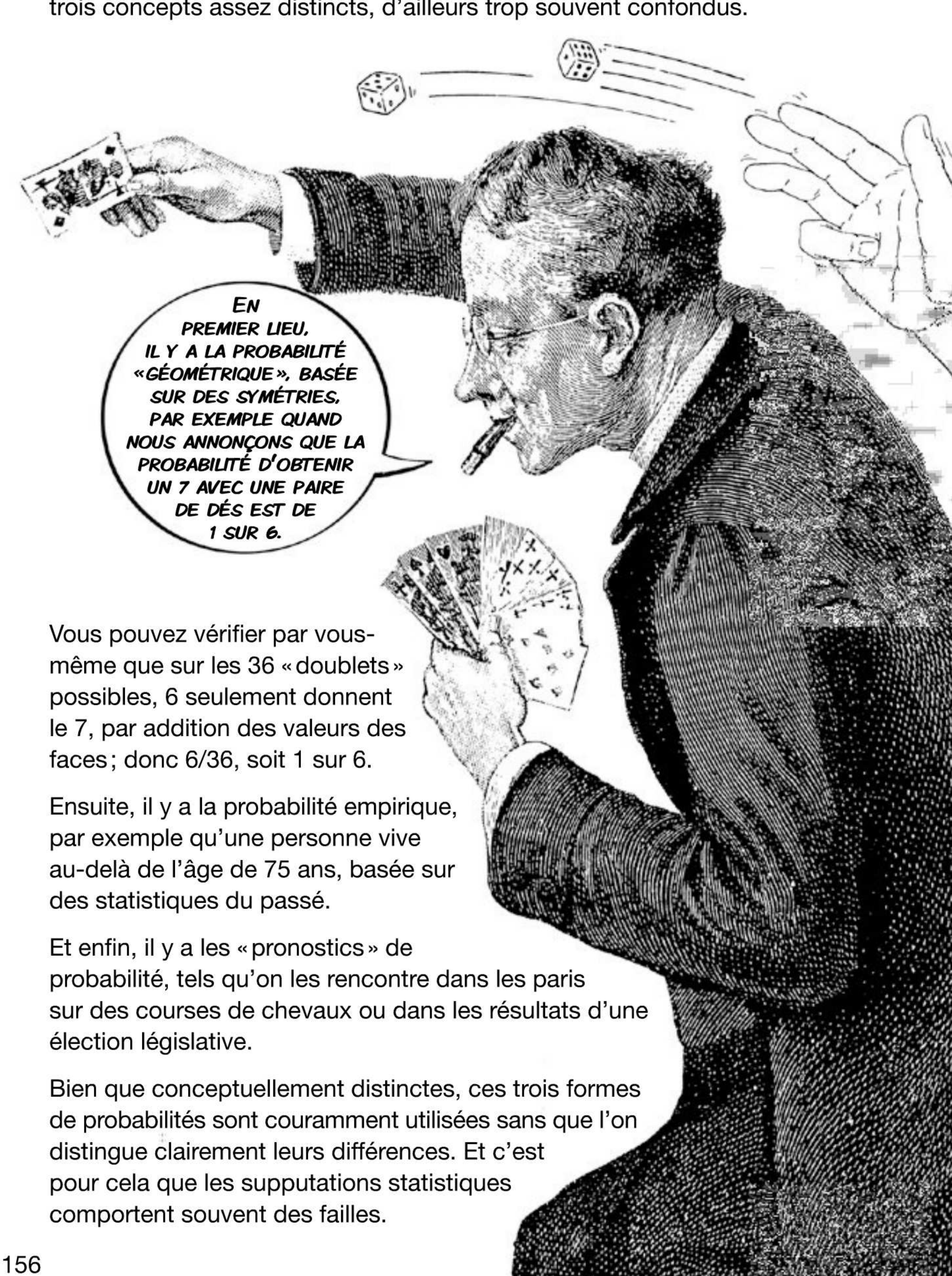
Il y a un revers à l'utilisation des valeurs-p – conçues pour limiter des possibilités d'annoncer des résultats positifs faux. Si une valeur-p déterminée de façon plus rigoureuse rend le test plus « sélectif », du même coup, il le rend moins « sensible ». Si, par exemple, notre test vise le niveau de toxicité d'un polluant environnemental, une valeur-p de 95 % peut nous protéger des fausses alertes, mais cela nous laisse vulnérables à une attitude de complaisance mal inspirée. Ainsi, un test de signification statistique apparemment « objectif » comporte implicitement le devoir « d'apporter la preuve » : à savoir, le produit doit-il être considéré comme « sûr », tant que l'on n'a pas prouvé son éventuelle toxicité, ou doit-on prendre le test come une alerte prémonitoire, donc valable. Dans chaque cas, on voit ici la mise en pratique du « principe de précaution ». Et la question à laquelle nous n'échapperons pas est : « Au nom de qui le principe de précaution est-il invoqué ? »

Même pour les utilisations les plus simples des statistiques, par exemple pour monter des données expérimentales, des a priori et des jugements de valeur sont inévitables. Les données recueillies ne « collent » pas toutes au trait que l'on veut faire passer par les points du graphique. Et quand ils en sont trop proches, on peut soupçonner un indice de « fabrication » frauduleuse. Certains points se trouvent assez loin de la « foule » – on les appelle les « hors échelle ». Si l'on intègre ces valeurs au calcul en cours, ce dernier pourrait subir un biais délétère. Mais, d'un autre côté, les rejeter d'office signifie qu'on leur prête un degré d'erreur… avec pour conséquence que l'on pourrait ainsi éliminer des données importantes, voire cruciales.



Les probabilités

Les techniques que l'on emploie pour traiter des données statistiques sont basées pour la plupart sur la théorie des probabilités. Celle-là fait appel à trois concepts assez distincts, d'ailleurs trop souvent confondus.



Vous pouvez vérifier par vous-même que sur les 36 « doublets » possibles, 6 seulement donnent le 7, par addition des valeurs des faces ; donc 6/36, soit 1 sur 6.

Ensuite, il y a la probabilité empirique, par exemple qu'une personne vive au-delà de l'âge de 75 ans, basée sur des statistiques du passé.

Et enfin, il y a les « pronostics » de probabilité, tels qu'on les rencontre dans les paris sur des courses de chevaux ou dans les résultats d'une élection législative.

Bien que conceptuellement distinctes, ces trois formes de probabilités sont couramment utilisées sans que l'on distingue clairement leurs différences. Et c'est pour cela que les supputations statistiques comportent souvent des failles.

Supposez quelqu'un dit à son amie:





Elle jette une fois de plus la pièce, qui tombe encore sur «face».



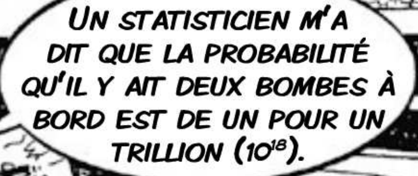


Soudain l'amie est perplexe. Elle sait pertinemment que pour une pièce non truquée, les «faces» ont la même probabilité géométrique que les «piles» de sortir. Et c'est pour cette raison «qu'à la longue», une pièce non truquée va tomber sur «face» autant de fois que sur «pile». La preuve sera apportée ici de manière empirique. Mais en partant de ces deux seules généralités, il serait hasardeux de juger si une pièce est truquée ou non.



Les jugements pour savoir si une pièce donnée est oui ou non truquée demandent une application des lois de probabilité et des statistiques. La conception expérimentale du test va incorporer les suppositions quant au comportement de la pièce à chaque jet, ainsi que des évaluations d'erreurs et la mise en place de limites de confiance pour en arriver aux jugements finals. Cet épiphénomène de jet d'une pièce entre copines, une fois clarifié, va nous entraîner vers des problèmes autrement plus sérieux. Tandis que la forme directe de la question est un simple constat sur les probabilités d'événements (Pile ou face ? La probabilité est égale pour une pièce non truquée), son inverse (Cette pièce est-elle truquée ?) implique des jugements basés sur des sciences statistiques.

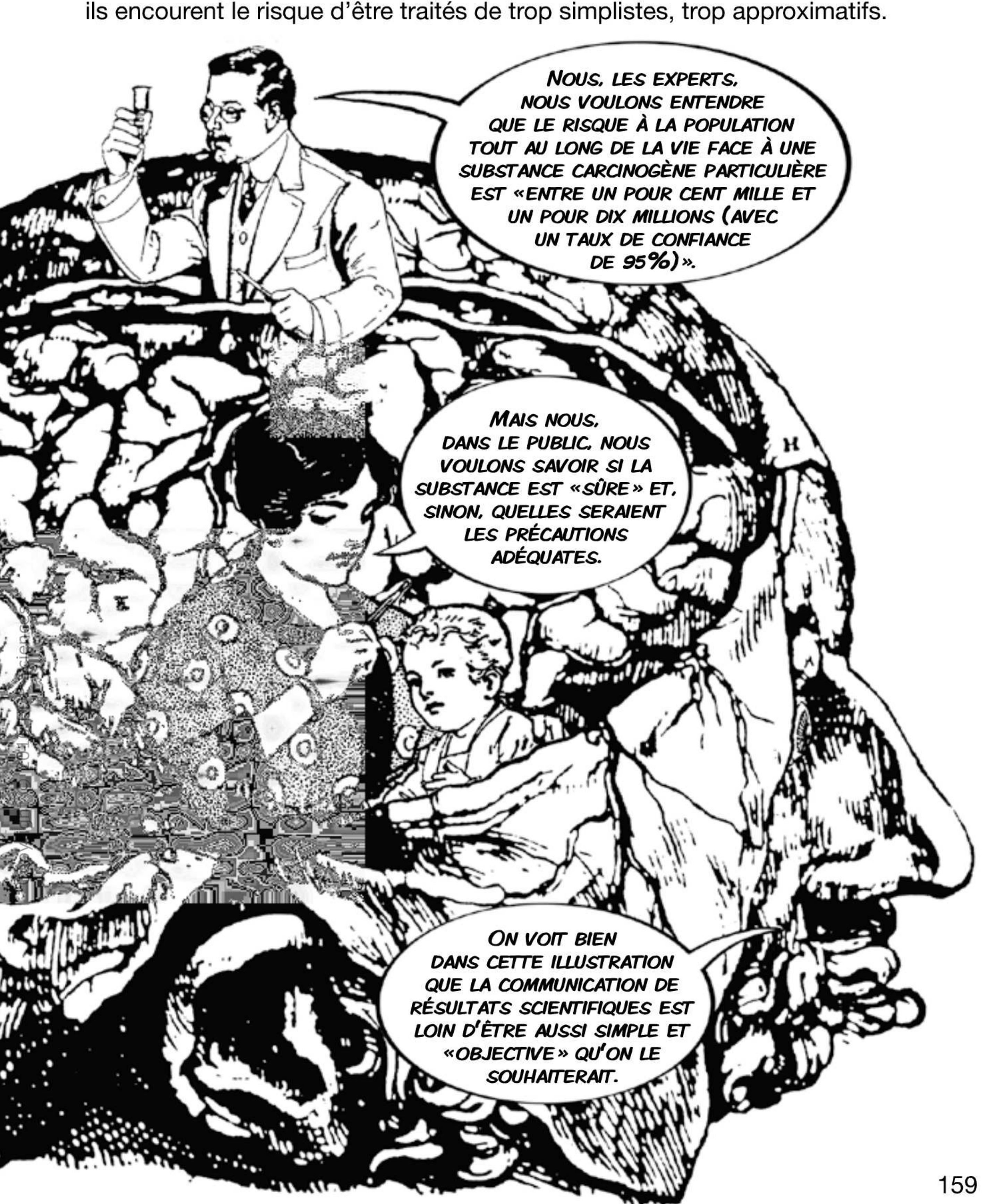
Dès lors que les arguments s'emmêlent les pinceaux avec des questions de causalité, on va trouver des pièges partout. Voici l'histoire d'un homme qui ne voulait pas prendre l'avion…



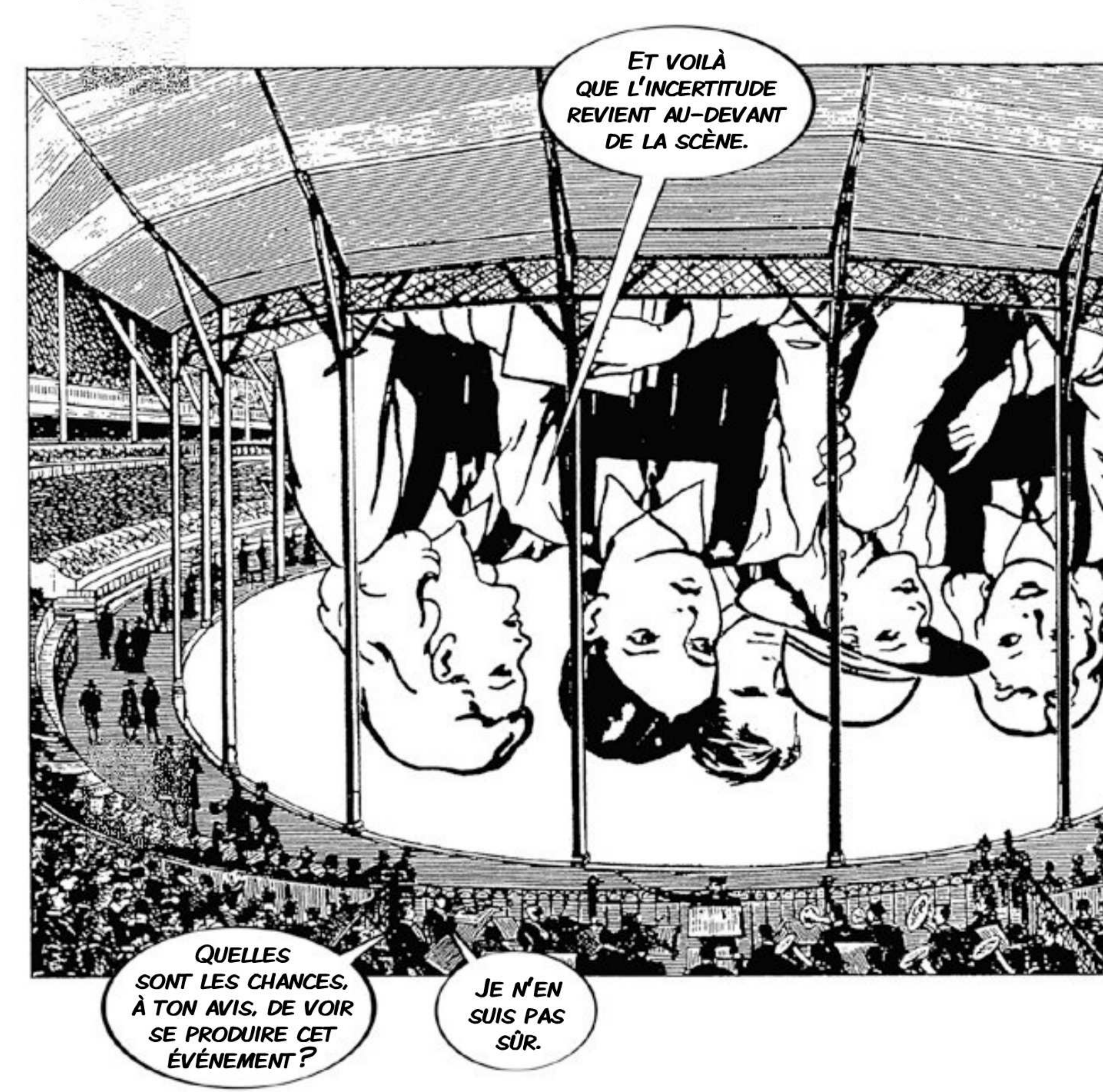


L'incertitude

Ceux qui ont à fournir des chiffres, soit aux décideurs soit auprès du public, font face à un dilemme assez cruel. S'ils expliquent les incertitudes et expriment des réserves quant à certains chiffrages, le résultat final peut se révéler incompréhensible. D'un autre côté, s'ils simplifient, en ne donnant qu'un nombre magique (souvent un pour un million) pour répondre à des questions de sécurité, ils encourent le risque d'être traités de trop simplistes, trop approximatifs.



Le grand défi auquel font face les mathématiciens sur le front social est la gestion de facteurs d'incertitude. Longtemps, on a cru que le progrès de la science dite naturelle repousserait les limites de l'ignorance en bannissant l'incertitude – et que ce qui resterait serait dompté par la théorie des probabilités.



L'incertitude a conquis les mathématiques depuis leur base et se trouve à présent au cœur de la théorique quantique de la physique moderne.

Nous sommes bien obligés, dorénavant, de constater les effets de notre civilisation industrielle sur son environnement naturel, à la fois complexe et imprévisible. Il n'est donc pas surprenant de voir naître de nouveaux champs de mathématiques ayant pour nom « la théorie du chaos » ou « la prévision des catastrophes ».

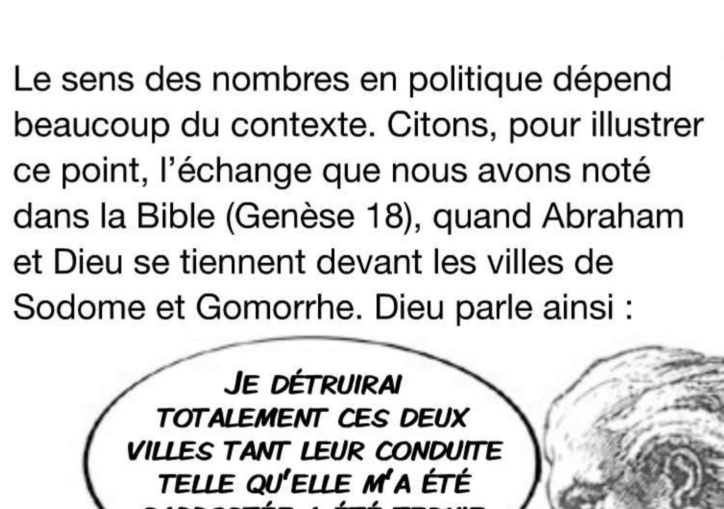
Les nombres « politiquement corrects »

Notre compréhension des nombres – conçus comme ils étaient pour compter et pour effectuer des calculs – n'est pas toujours pertinente quand on aborde leur utilisation en politique. Cela demande des concepts bien différents et d'autres compétences. Et, étant donné notre longue tradition de considérer les mathématiques comme quelque chose de précis et de vrai, nous avons tendance à oublier que l'incertitude fait partie intégrante du monde des nombres à usage « politiques ». Trop de précisions dans les informations relayées par les médias et dans les communiqués officiels entourent de mystère le facteur d'incertitude. Si, par exemple, une quantité est composée de deux chiffres, disons 47, cela signifie que la valeur n'est ni 46, ni 48, ou qu'on la connaît à 2 % près.





Le sens des nombres en politique dépend beaucoup du contexte. Citons, pour illustrer ce point, l’échange que nous avons noté dans la Bible (Genèse 18), quand Abraham et Dieu se tiennent devant les villes de Sodome et Gomorrhe. Dieu parle ainsi :



Puis Abraham dit…

Ainsi Abraham revoit son argumentation. Il ne parle plus de politique (épargner la ville si l’on peut y trouver quelques âmes vertueuses) mais d’implémentation (que faire si nous sommes juste en dessous de la limite annoncée ?). Dans le contexte biblique, 50 n’est pas un compte juste mais un **comptage politique**, avec une marge. Abraham défend l’idée que 45 serait encore admissible. Le Seigneur ne va quand même pas détruire la ville parce qu’il manque 5 âmes vertueuses, car c’est en dessous de la limite de sens ? Le Seigneur cède le point et accepte la marge proposée. Et, sentant l’habileté de son adversaire, le Seigneur laisse descendre sa limite à 10. Abraham ne négocie plus et, prudemment, s’arrête là.



Cette histoire du « sauvetage de Sodome » démontre à quel point des nombres peuvent avoir des sens très différents dans une argumentation. 50 était l'estimation initiale et 5 la marge (c'est-à-dire qu'avec 45 Dieu ne détruirait pas la ville). La différence entre 4 et 50 dépend du contexte. Parfois la différence est significative (hors limite) et parfois non. Bien que notre exemple traite d'un nombre à valeur politique, la question du sens à y accorder dépend du contexte et cela reste vérifiable pour toute estimation et toute mesure.

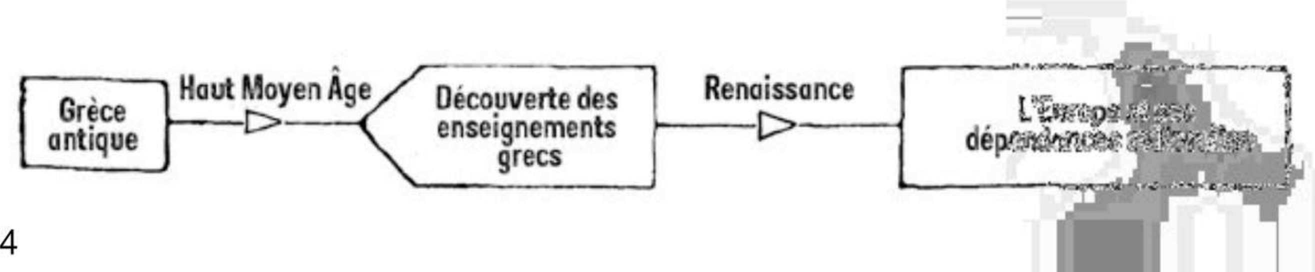
On voit apparaître le même phénomène dans ce que l'on appelle le paradoxe du « tailleur de clefs ». Au départ, une personne dispose de la clef d'origine, qui marche bien avec la serrure, puis d'autres personnes en font ensuite des copies. À chaque copie, la forme est exacte (dans les limites que tolère la machine), mais après de multiples copiages, les clefs ne marchent plus, parce que l'accumulation des marges d'erreur dépasse la tolérance du barillet d'origine. Pour connaître cette dimension critique, nous aurons (en termes de mesure) : A = B = C =… K. Mais A n'est pas identique à K. En termes arithmétiques ordinaires, cela n'a pas de sens. Néanmoins le processus explique comment les nombres, dans des estimations et des mesures, ont un sens précis uniquement dans un contexte donné, qui n'est pas le même que lorsque l'on fait du simple comptage.

Les mathématiques et l'eurocentrisme

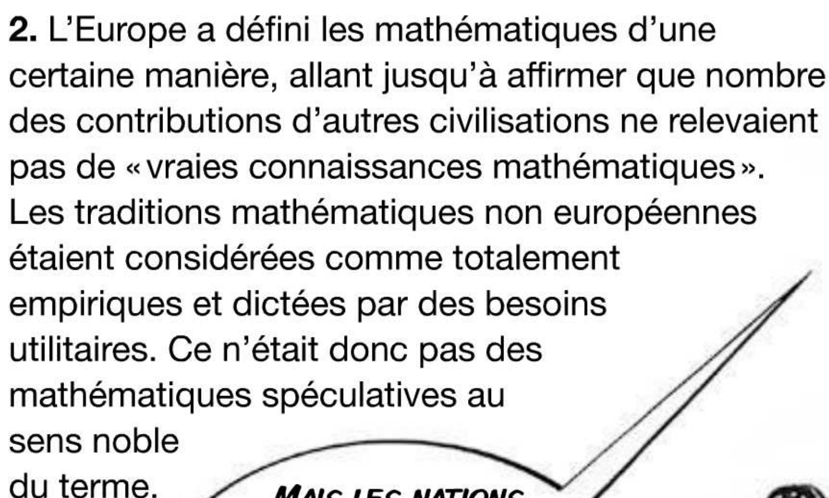
Les mathématiques européennes ont joué un rôle considérable dans la prise de conscience de l'Europe – de sa perception de posséder la plus grande richesse culturelle, l'unique monde de la culture véritable. Ceux qui ont vu dans les mathématiques la seule vraie valeur universelle et vertueuse trouvent difficile de croire que l'impérialisme et les mathématiques ont avancé main dans la main. Les mathématiques ont même servi à démontrer l'infériorité des cultures non occidentales.

L'Europe a mis en œuvre trois tactiques pour disséminer l'idée d'eurocentrisme en mathématiques.

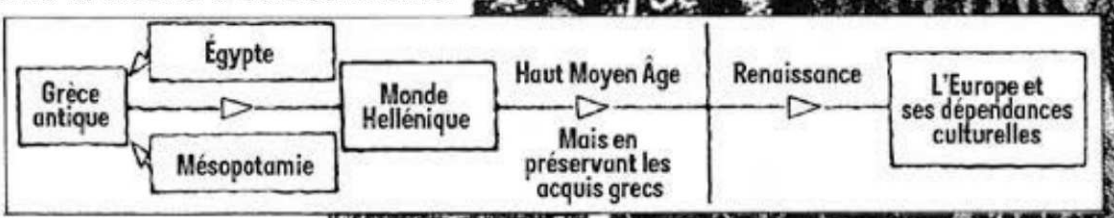
1. L'Europe s'est appropriée les contributions de cultures non occidentales, tout en les rendant « invisibles ». Il y a eu un vide historique avant le miracle de l'Antiquité grecque ; puis rien, absolument rien avant la Renaissance européenne du XVI[e] siècle. En résumé, c'était là l'eurocentrisme classique.



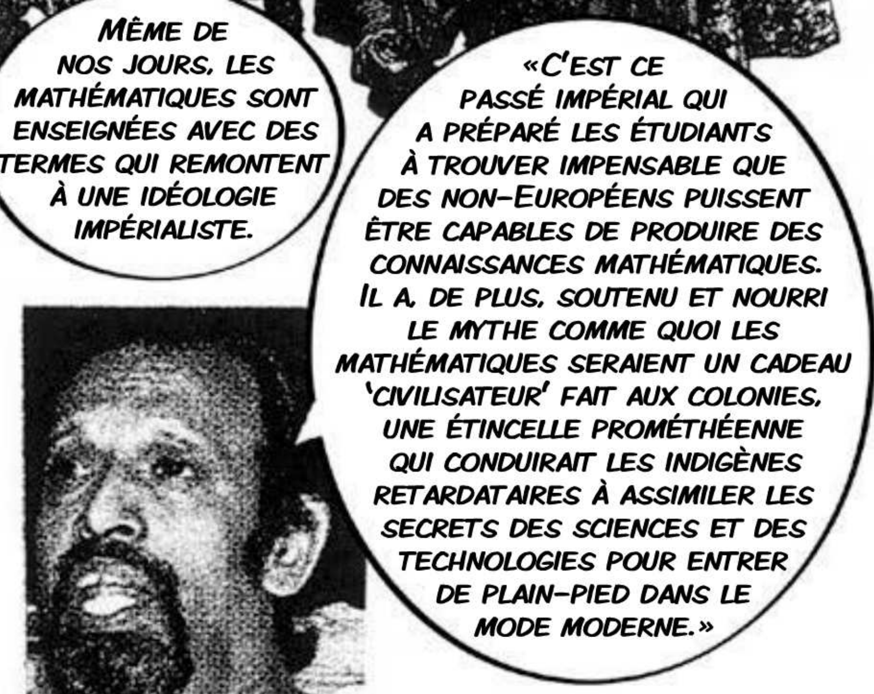
2. L'Europe a défini les mathématiques d'une certaine manière, allant jusqu'à affirmer que nombre des contributions d'autres civilisations ne relevaient pas de « vraies connaissances mathématiques ». Les traditions mathématiques non européennes étaient considérées comme totalement empiriques et dictées par des besoins utilitaires. Ce n'était donc pas des mathématiques spéculatives au sens noble du terme.



C'est ce qui a été désigné comme la bande transporteuse ayant alimenté la théorie d'eurocentrisme.



3. Elle a légitimé le récit « traditionnel » du développement des mathématiques comme un produit exclusivement européen, et l'a même institutionnalisé sous la forme d'une éducation spécifique aux mathématiques.



George Gheverghese Joseph (1939-), historien anglo-asiatique des mathématiques.

Les ethno-mathématiques



Cette discipline cherche à établir un lien étroit entre mathématiques, culture et société, et sert à nous rappeler que le terme «mathématiques» couvre plus que les études théoriques de la tradition platonicienne. Nous voyons bien la variété, l'ingéniosité et la créativité qui ont présidé aux chemins par lesquels différentes personnes ont accompli et rendu intelligibles leurs travaux mathématiques.



Ainsi, les pratiques ethno-mathématiques incluent non seulement les systèmes à symboles, mais aussi la conception spatiale, les techniques de construction, les mesures du temps et de l'espace, les différentes manières spécifiques de raisonner, d'analyser et d'inférer… et autres activités cognitives et matérielles.

Les mathématiques et le genre

Malheureusement pour notre héritage mathématique, il est vrai que ce dernier a été l'œuvre d' « hommes blancs morts ».

Les rares femmes qui, par le passé, ont été distinguées pour leurs travaux mathématiques sont des exceptions à la règle. L'une d'elles, la mathématicienne française **Sophie Germain** (1776–1831), a dû se faire passer pour un homme pour engager une correspondance suivie avec le mathématicien allemand **Karl Friedrich Gauss** (1777–1855).

Mon secret a été trahi quand la Grande Armée de Napoléon a capturé sa ville (Göttingen) et j'ai dû user de ma condition féminine pour lui obtenir un sauf-conduit.

Quand le commandant des troupes françaises m'a transmis les salutations de Mademoiselle Germain, j'ai été très étonné – jusque-là, je pensais que ma correspondante parisienne était un jeune homme.

On a avancé plusieurs causes (suggérées par des psychologues) pour expliquer la traditionnelle « infériorité » des femmes en mathématiques.



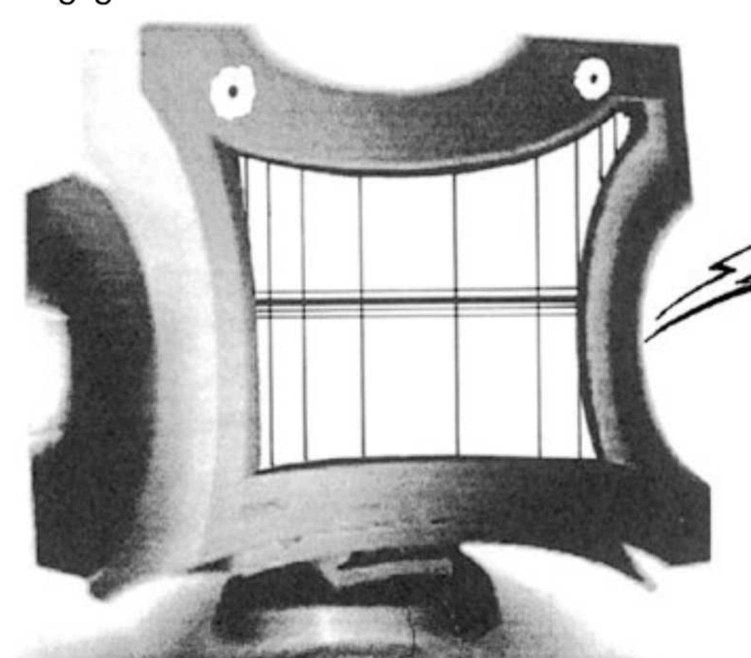
Et maintenant ? Où allons-nous ?

Depuis plus de mille ans, la culture occidentale est dominée par une vision platonicienne des mathématiques.

C'EST UNE VISION DES CONNAISSANCES LIBÉRÉE DE TOUTE TÂCHE FASTIDIEUSE, QUI S'APPROCHE DE LA VÉRITÉ ET, DE SURCROÎT, NE SOUFFRE PAS DE CONTRADICTION.

LES NOMBREUX POINTS DE DIVERGENCE ENTRE CETTE VISION ET LA RÉALITÉ ONT ÉTÉ ESCAMOTÉS, HORS DE NOTRE VUE.

Les philosophes, les enseignants et les vulgarisateurs, tous, ont présenté les mathématiques sous un angle platonicien. Les sciences – dans cette vision du monde – sont bâties sur les applications de vérités mathématiques. En faisant partie de cette image, les contributions des mathématiciens des cultures non occidentales ont été écartées, négligées ou déformées.



En dépit de l'élargissement des connaissances, en général, de notre société moderne et industrielle, une compétence en calcul et une familiarité avec les chiffrages restent l'apanage d'une élite culturelle et sociale.





Dans ces conditions, il est essentiel que nous sachions et que nous appréciions ce que l'on appelle les faillites manifestes des mathématiques (avec une démarche scientifique), afin de surmonter les incertitudes du monde réel qui nous entoure. Il faut que nous réfléchissions à nouveau à ce qu'est la vraie connaissance et à ce dont elle est capable.

Les mathématiques font face à de nouveaux défis. Et nous, les citoyens, avons un rôle à jouer. Pour reprendre la pensée et l'expression de de l'évêque Berkeley, chacun…





Lectures recommandées par les auteurs

Les livres de vulgarisation sur les mathématiques semblent être en nombre croissant ces derniers temps, et il n'est pas possible parfois de choisir parmi eux de « bons textes », au vu de la masse d'ouvrages proposés. Alors, si vous recherchez un regard « humaniste » des mathématiques, vous préférerez, pour ses rapides détours historiques, philosophiques sans oublier les applications, *The Mathematical Experience and Descartes' Dream* de P. J. Davis et R. Hersh, publié chez Harvester, Brighton 1981, 1986 ; pour avoir accès à un monument du genre, il y a *Mathematics in Western Thought*, par M. Kiline (paru chez Penguin, Londres, 1972), à qui on doit la première synthèse systémique des conflits étouffés aux débuts de l'épopée mathématique, cf. son *Mathematics : The Loss of Certainty* (publié par Oxford University Press, Oxford & New York, 1980) ; et dans ses nombreux ouvrages, le professeur Ian Stewart décortique les méandres complexes des mathématiques, les rendant d'autant plus agréables à assimiler : notre suggestion est de démarrer par *Problems of Mathematics* (Oxford University Press, Oxford & New York, 1987) puis d'enchaîner avec *The Magical Maze* (Weidenfeld & Nicholson, Londres, 1998).

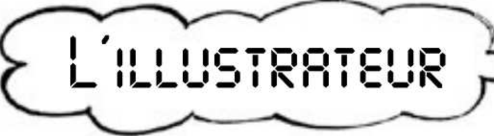
Dans son livre, *The Crest of the Peacock* (La crête du paon) paru chez Penguin, Londres, 1990, George G. Joseph révèle les « racines non-européennes des mathématiques » ; Donald Hill nous offre une lecture agréable des mathématiques arabes dans *Islamic Science and Engineering* (paru chez Edinburghg University Press 1993) ; M. Ascher donne « point de vue multiculturel des idées mathématiques dans *Ethnomathematics* (chez Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove 1990) ; M.P.Cross (ed.) se concentre sur *Native Amercan Mathematics* (University of Texas Press, Auston 1986) ; et enfin Claudia Zaslavsky fait un effort pluridisciplinaire pur dissiper la Fear of Mathematics (Rutgers, New Jersey, USA 1994).

Simon Singh nous décrit de manière captivante comment le *Fermat's Last Theorem* a été résolu récemment ; dans *The Number Sense* (Allen lane, Londoin 1997), S ; Dehaene explore une approche neuro-psychologique à la pensée mathématique ; David Berlinski invite le loectier à faire un *Tour of the Calculus* (Mandarin, London, 1996) ; Ziauddin Sardare et Iwona Abrams propose un guide relevé (dans la même série que celu-ci) *Introducing Chaos* (Icon Books, Cambridhge, 1998) et les lecteurs trouveront une approche très innovatrice du traitement des nombres en politique dans *Uncertainty and Quality in Science for Policy*, par S.O. Funtowicz et J.R.Ravetz (Kluwer, Dordrecht 1990). Et enfin dans *Mathematics for the Curious* (Oxfotrd University Press, Oxford & New York 1998) devrait satisfaire la curiosité de tout un chacun.



Ziauddin Sardar a fait un faux départ, démarrant une carrière de physicien avant de se raviser et passer au journalisme scientifique et aux reportages « télé », puis s'installer comme écrivain et critique (spécialisé en événements culturels). Il est bien connu sur le plan international pour ses exposés avec, entre autres publications, *Barbaric Others*, *Postmodernism and the Other* et *Cyberfutures* qu'il a coédité avec Jerry Rabetz. Il est l'auteur des guides sur *Mahomet*, les *Études culturelles* et *le Chaos*, parus dans la série *Introducing… d'Icon*.

Jerry Rabetz est un philosophe au sens large, avec un parcours hors normes et rare. Il a obtenu son doctorat (de mathématiques) à l'université de Cambridge ; il est membre du prestigieux groupe de travail *Production of a Public Understanding of Mathematics* et l'auteur de *Scientific Knowledge and its Social Problems*. Avant cela, il était enseignant dans le département d'Histoire et philosophie des sciences à l'université de Leeds, où il fut précurseur d'études sur le sujet « incertitude » et l'utilisation faite des nombres dans les sphères sociales et scientifiques.





Borin Van Loon. Cet ouvrage sur les mathématiques est le 7e de ceux qu'il a illustrés dans la série *Introducing… (Aperçus)* ; on peut citer *Darwin* de Jonathan Miller, ou *Genetics* de Steve Jones, *Cultural Studies* de Zia Sardar, sans oublier *Buddha, Sociology* et *Ancient Eastern Philosophy*. Il s'est distingué comme auteur, « illustrateur » et peintre surréaliste pour une fresque dans le London Science Museum et ce qu'il appelle un flot de bandes dessinées de l'inconscient (depuis les réalités multiples des postulats de la physique quantique à l'art de beurrer les radis) qui sortent de ses oreilles finement ciselées si aristocratiques !

INDEX

Abaque **39**, **62**
Achille **57**
Aire (fonction de) **107**
Aire **107**
Aleph **133**, **134**
Algèbre **62**, **71**, **73**, **77–81**, **91**
Algèbre de Boole **126–128**
Algèbre de l'infini **101**
Algorithmes **78**
Alphabet phénicien **20**
Analyse combinatoire **80**
Analyse indéterminée **65**
Analytique (géométrie) **93**, **96**, **102**
Arabe ou Musulman **23**
Archimède **61**
Arithmétique **12**
Art divinatoire **22**
Asymétrie **99**
Autel (géométrie de l') **69**
Aztèques **13**

Babbage, Charles **41**
Babyloniens **1**
Bases **9–12**, **16**, **17**, **37**, **100**
Battani, al- **83**
Berkeley, George **111–113**
Bhaskara, II- **73**
Bolyai, Janos **119**
Brahmagupta **71**

Calcul **39–41**
Calcul de nombres entiers **70**
Calcul différentiel **70**, **73**, **101–110**
Calendrier **25**
Cantor, George **154**
Carré (cf. puissance)
Carrés magiques **63**
Certitude **154**
Chaos (théorie du) **145**
Chia Hwien **67**
Chin Chiu Shao **65**
Chinois (anciens) **17–18**
Chiu Chang **64**
Chu Shih Chieh **66**
Codage, (cf. cryptographie)
Comptage **7**
Cônes (sections) **95**
Confiance (limites), (cf. valeurs-p)
Constantes **42**, **94**, **96**, **99**
Coordonnées (géométrie des) **93**
Copernic, Nicolas **86**
Cosinus **82**, **99**, **117**
Cotangentes **83**
Coudée (royale) **48**
Courbes (propriétés), **94**, **95**, **105**
Cryptographie **151**
Cubes (nombres), (cf. puissances)

Dakota (langage) **8**
Davis, Philip **170**
'Dazzling', The **36**
Defence ofde Freethinking… **112**
Dénominations (grands nombres) **8**
Dérivées **101**
Descartes, René **91**
Diderot, Denis **114**
Différentiation **101**, **102–104**
Dimensions **120**, **121**
Diophante **87**
Distance (fonction) **105**

Égyptiens (Aanciens) **15**
Équations **42–47**, **62**, **69**, **78**
Équations cubiques **45**
Équations linéaires **44**, **45**
Elements, The **59**
Ellipse **94**
Entiers **28**, **87**, **150**
Erreurs (barres) **51**
Ethno-mathématiques **166–167**
Euclide **59–61**
Euler (formule) **115–117**
Euler, Leonhard **114**
Exponentielle (fonction) **37**, **99**, **100**

Fermat, Pierre de **150**
Flatland **121**
Fonctions **117**
Fonctions antisymétriques **99**

Fonctions
constantes **99**
Formalisme **122**
Fractales (géométrie
des) **143**, **144**
Fractions **28**, **129–130**

Galois,
Évariste **122–125**
Geématriea **22**
Genre **168**
Géométrie **59**, **118**
Géométrie analytique
93, **96**, **102**
Géométrie de l'autel **69**
Géométrie des
coordonnées **93**
Géométrie non
euclidienne **118**
Germain, Sophie **168**
Gödel, Kurt **138–140**
Goldbach
(conjecture) **149**
Grand nombres
31–36, **69**, **72**
Graphes **94**
Graphiques **106**, **143**
Graphiques **143**
Grecs de l'Antiquité **20**
Groupes (théorie
des) **123–125**

Hardy, G.H. **76**
Hersh, Reuben **170**
Hiéroglyphes **15**
Hindous **69**, **70**
Hindous brahmiques **19**
Hindous Gwalior **19**
Hindous Kharosthi **19**
Hyperbole **46**, **95**
Hypoténuse **29**, **82**

Identité **43**
Indiens (Brahmis) **19**
Indiens (invention
du zéro) **24**
Indiens (Yorubas) **11**
Infini **129**, **133**, **134–137**
Intégration **105**
Intersection **125**

Jaïn **72**, **73**
Joseph, George G. **165**

Karaji, al- **80**
Kashi, al- **81**
Khayyam, Omar al- **81**
Khuwarazmi,
Muhammad al- **78**
Kuhn, T.S. **113**

Leibniz, G.W., von
40, **101**, **108**
Lemme Théorème
des **4** quatre
couleurs **147**, **148**
Liu Hui **63**
Lobachevski,
Nikolai **119**
Logarithmes
(fonction) **100**

Machine à
additionner **40**
Machine à
différences **41**
Mahaviracharya **72**
Mandelbrot, Benoît **144**
Mathématiques
(avenir des) **169**, **170**
Mathématiques
(conception des) **53**
Mathématiques
(conception) **53**
Mathématiques
(craintes) **6**
Mathématiques
(crise) **135**
Mathématiques
(effets de) **169**, **70**
Mathématiques (euro-
centrisme) **164**, **165**
Mathématiques
(genre) **168**
Mathématiques
(grecques) **54–61**
Mathématiques
(pourquoi ce
besoin ?) **4**, **5**
Mathématiques
chinoises **62–67**
Mathématiques
indiennes **68–76**
Mesures **48–53**
Mesures impériales
(unités) **50**
Milliard **31–33**
Monuments et
mesures **52**
Moteur de
recherche **41**

Mouvement
(paradoxe) **57–58**
Moyennes **152**, **153**
Musique **55**

Napier, John **38**
Navigation **89**
Newton, Isaac **101**, **108**
Nombre (théorie du)
85, **149–151**
Nombre parfait **27**
Nombres (en
politique) **161–163**
Nombres (grands)
31–36, **69**, **72**
Nombres
(pictogrammes) **8**, **13**
Nombres (théorie des)
85, **149–151**
Nombres complexes **30**
Nombres écrits **13–23**
Nombres imaginaires
30, **92**
Nombres irrationnels
29, **62**, **90**
Nombres négatifs
28, **62**, **79**, **90**
Nombres premiers **27**
Nombres
transcendantaux **29**
Notions courantes **60**
Numération arabe **23**
Numération Mmaya **14**
Numérologie **22**

Ordinateurs **41**,
141–148, **169**

Parabole **94**, **96**
Paradoxes
57–58, **135–137**
Paramètres **42**
Pascal (triangle
de) **66–67**
Pascal, Blaise **40**
Périodique **99**, **107**
Peuple aborigène **9–13**
Philosophie **58**
Pi (π) **29**, **61**, **63**
Pictogrammes **8**, **13**, **15**
Plane (géométrie) **93**
Polynômes **08**
Postulat des droites
parallèles **60**, **118**, **119**
Postulats **60**
Puissances **33–36**, **99**

Racines **98**

Sphérique (géométrie) **84**
Symétrie **99**
Système métrique (SI) **50**

Table d'addition **125**
Table de
multiplication **125**
Théorème binomial **66**
Trigonométrie **99**

Valeur **154**, **155**, **158**
Védique ((géométrie)
69, **70**, **73**
Vitesse instantanée **103**

Zéro **24**



Que sont les mathématiques ?
Pourquoi semblent-elles si mystérieuses ?

Les mathématiques sont la plus grande création intellectuelle de l'Homme et ce dès les premières civilisations avec des disciplines comme la géométrie, l'algèbre ou la trigonométrie. Aujourd'hui, elles sont partout dans notre vie quotidienne.

Cet ouvrage retrace l'Histoire des mathématiques, de ses premiers concepts jusqu'à nos jours, à travers des sujets comme les nombres, le calcul, la théorie de l'infini, le chaos, les statistiques...

Ziauddin Sardar est un intellectuel britannique et écrivain. Jerry Ravetz est, quant à lui, philosophe et mathématicien à l'Université de Leeds.

Originale et très illustrée, la collection **Aperçu** *est une introduction aux grands concepts ou théories scientifiques. Grâce à son style décalé et ludique, elle permettra à tout lecteur d'enrichir sa culture générale.*

Prix : 9,90 €

Couverture et illustration par edwardbettison.com

ISBN 978-2-7598-1737-5